Signaux Electriques SE7 Filtrage linéaire d'un signal périodique

I Filtrage d'un signal non sinusoïdal

1.) Théorème de Fourier (découvert par le mathématicien et physicien Joseph Fourier début XIX)

Tout signal périodique de pulsation ω_s et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples de ω_s.

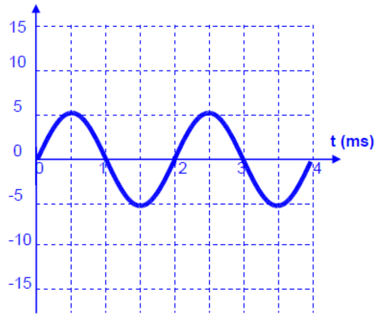
$$\boxed{s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \text{ où } \omega_n = n.\omega_s \text{ et } \omega_s = 2\pi f_s}$$

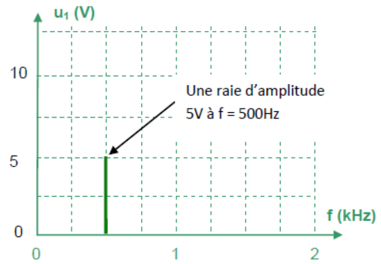
Les A_n sont des amplitudes (constantes positives). Les φ_n sont les avances de phase (constantes).

A_0 est la composante continue du signal, ou valeur moyenne ou offset.
A_1 est l'amplitude du signal fondamental de fréquence f_s.
Les A_n sont les amplitudes des harmoniques de fréquence $f_n = n.f_s$ de rang $n \geq 2$.

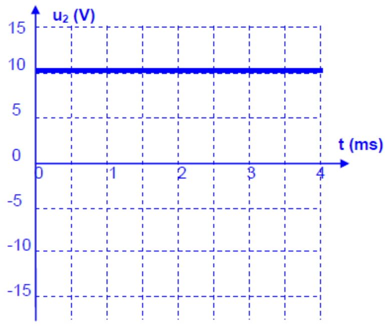
Analyse spectrale : Opération qui consiste à déterminer la décomposition en signaux sinusoïdaux d'un signal donné.

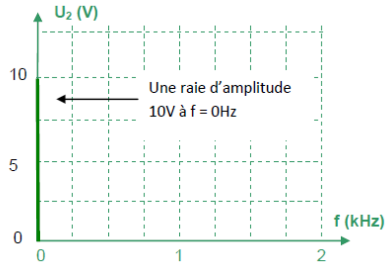
Exemple 1 : u1(t) = 5.sin (2π.500.t) ne contient qu'une seule fréquence : f = 500 Hz T = 2 ms



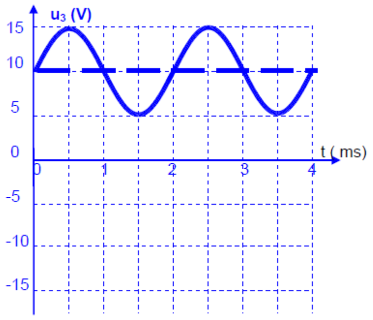


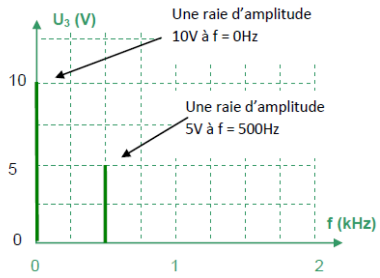
Exemple 2 : $u_2(t) = U_2 = 10$V



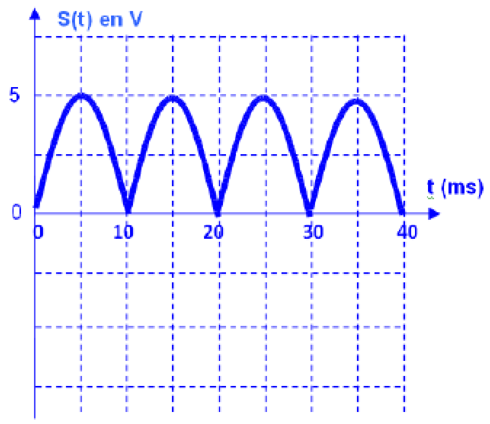


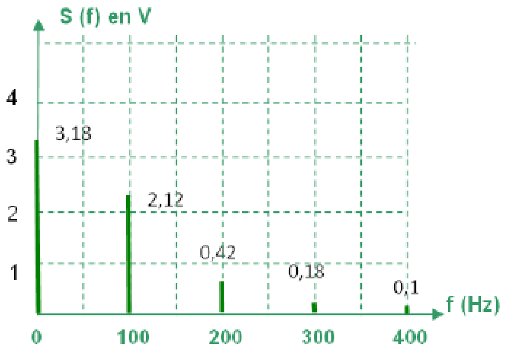
Exemple 3 : $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t) = 10 + 5.\sin(2\pi .500.t)$





Exemple 4 : Signal sinusoïdal redressé « double alternance »





Exemple 5 : Signal carré

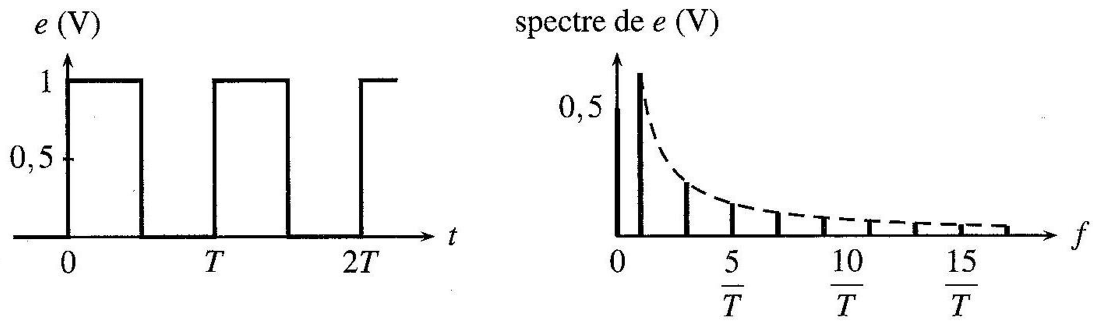


Figure 12.14 – Forme d'onde et spectre du signal $e(t)$.

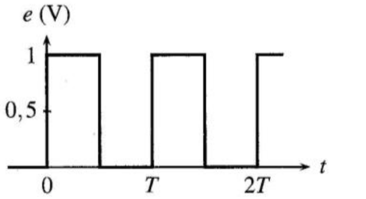
Remarque : Conservation de la puissance

Pour une tension périodique u(t) mesurée aux bornes d'une résistance R, on a la décomposition en série de Fourier : $u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff}\sqrt{2}\cos(\omega_n t + \varphi_n)$ où $U_n = U_{n,eff}\sqrt{2}$

On admet que : $U_{eff}^2 = U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff}^2$ Formule de Parseval

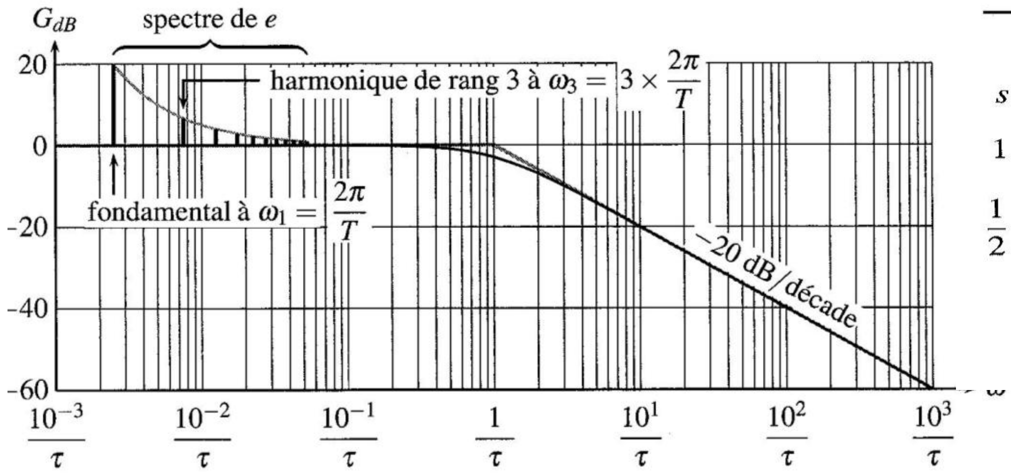
donc $\frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{n,eff}^2}{R}$ $donc\ P_R = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$

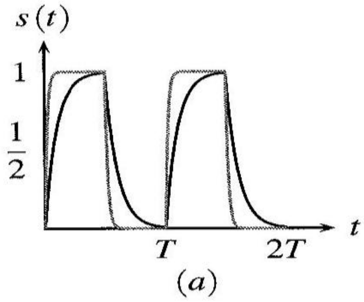
La puissance moyenne absorbée par la résistance R, due à la tension u(t), est la somme des puissances dues à chacune des composantes de Fourier de la tension u(t) (sa valeur moyenne, son fondamental et toutes ses harmoniques).



2.) Filtre passe-bas du premier ordre

Figure 12.15-Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où $\omega_s \ll \omega_c$

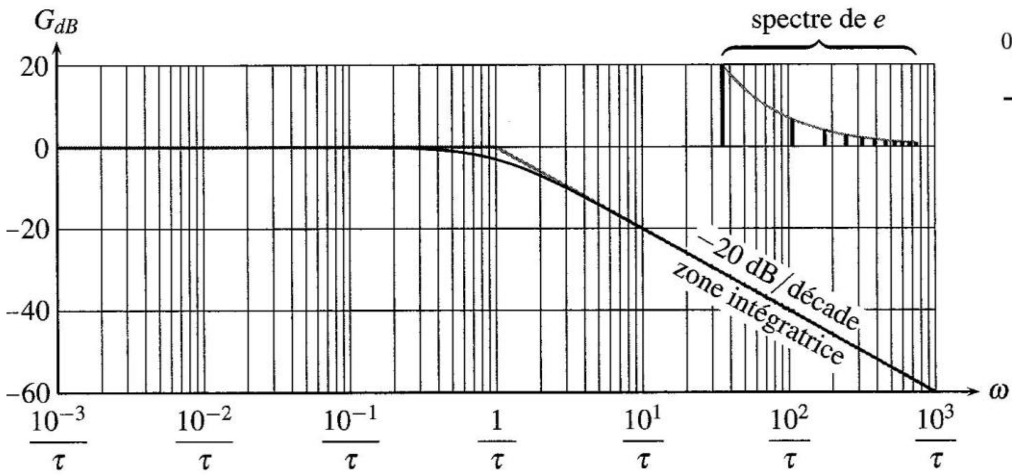


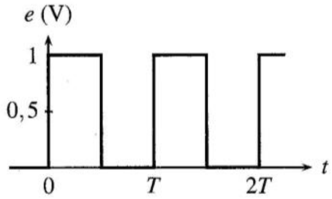


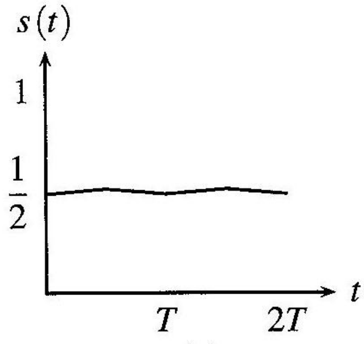
Filtrage passe-bas d'un signal créneaux

(a) $\omega_s = 0{,}12\ \omega_c$ ($T_s = 50\tau$) en gris et $\omega_s = 0{,}6\ \omega_c$ ($T_s = 10\tau$) en noir

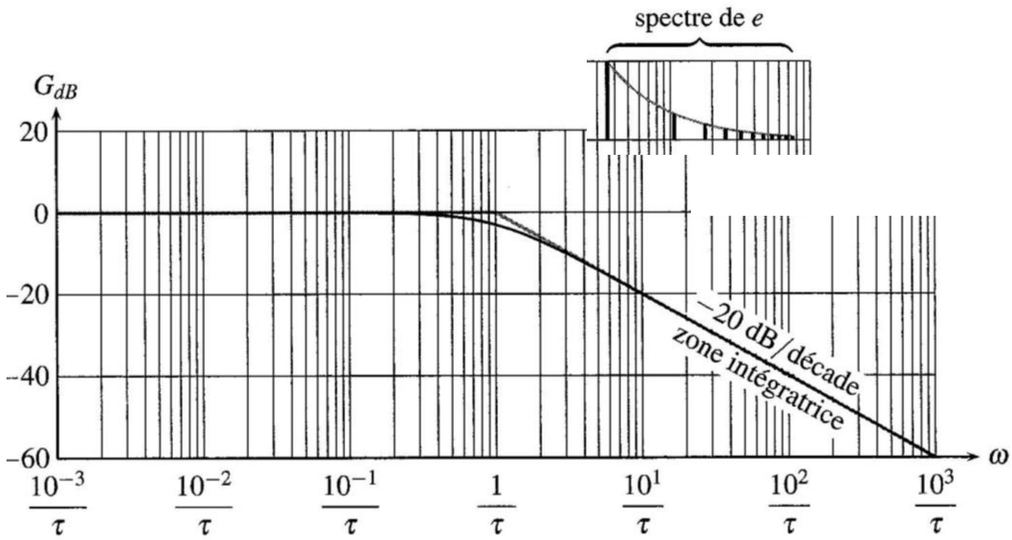
Figure 12.16-Gain du système et spectre de l’entrée dans le cas où $\omega_s \gg \omega_c$

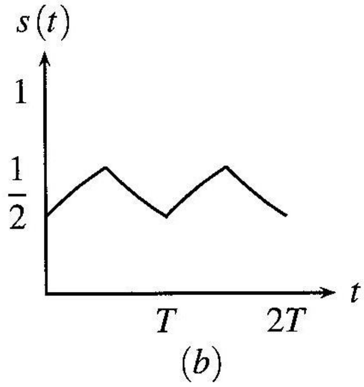






Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (c) $\omega_s = 60\ \omega_c$ ($T_s = 0{,}1\ \tau$) (c)

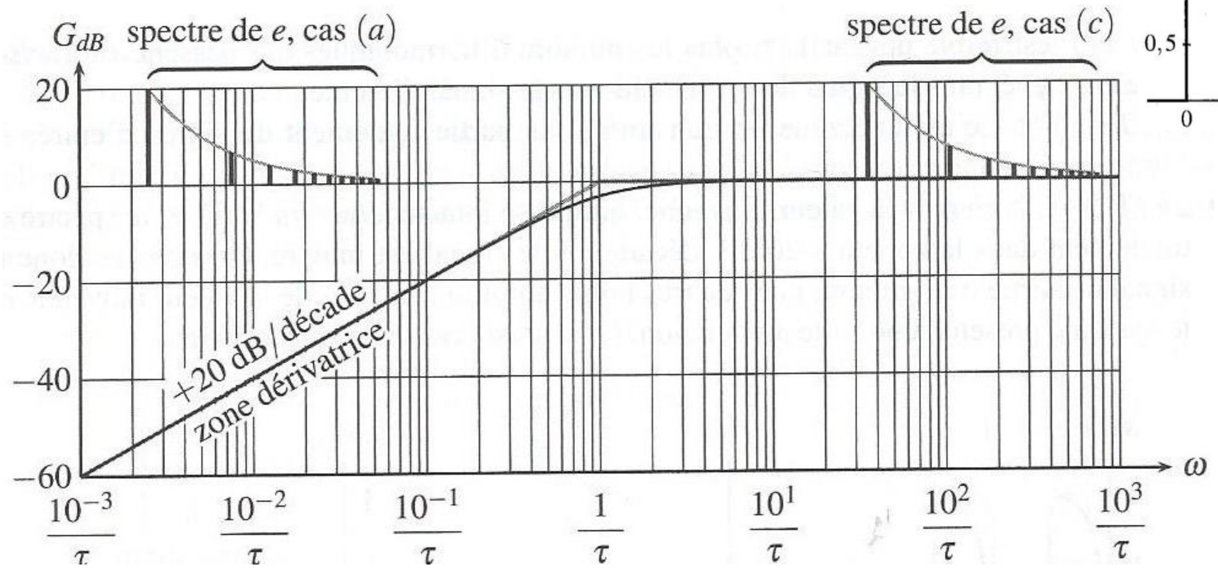




Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (b) $\omega_s = 6\ \omega_c$ ($T_s = \tau$).

3.) Filtre passe-haut du premier ordre

Figure 12.18-Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-haut



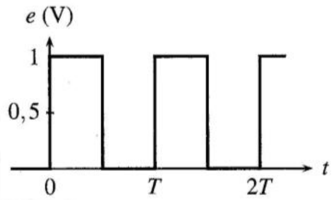
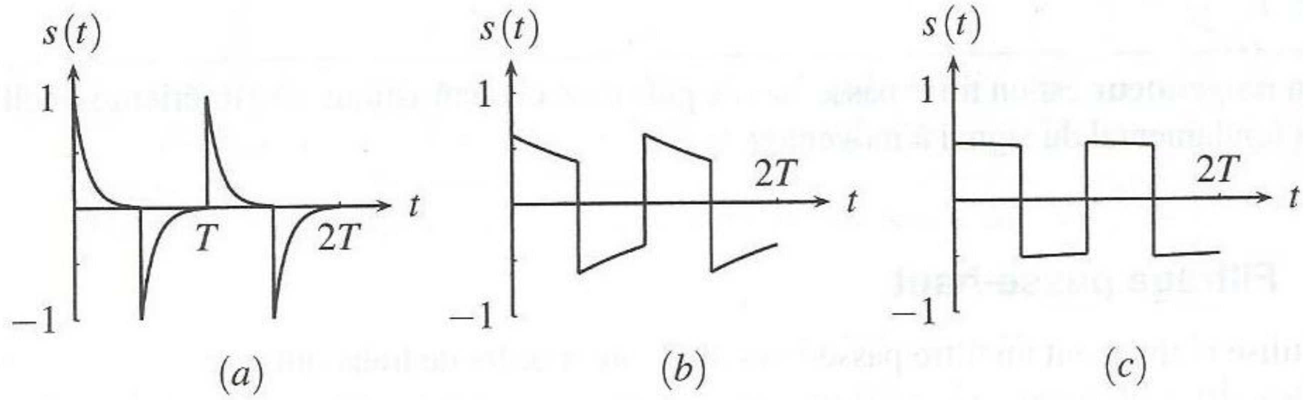


Figure 12.19-Filtrage passe-haut d'un signal créneau



$\omega_s = 0{,}6\ \omega_c\ (T_s = 10\ \tau)$ $\omega_s = 6\ \omega_c\ (T_s = \tau)$ $\omega_s = 60\ \omega_c\ (T_s = 0{,}1\ \tau)$

4.) Filtre passe-bande

Figure 12.20-Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-bande

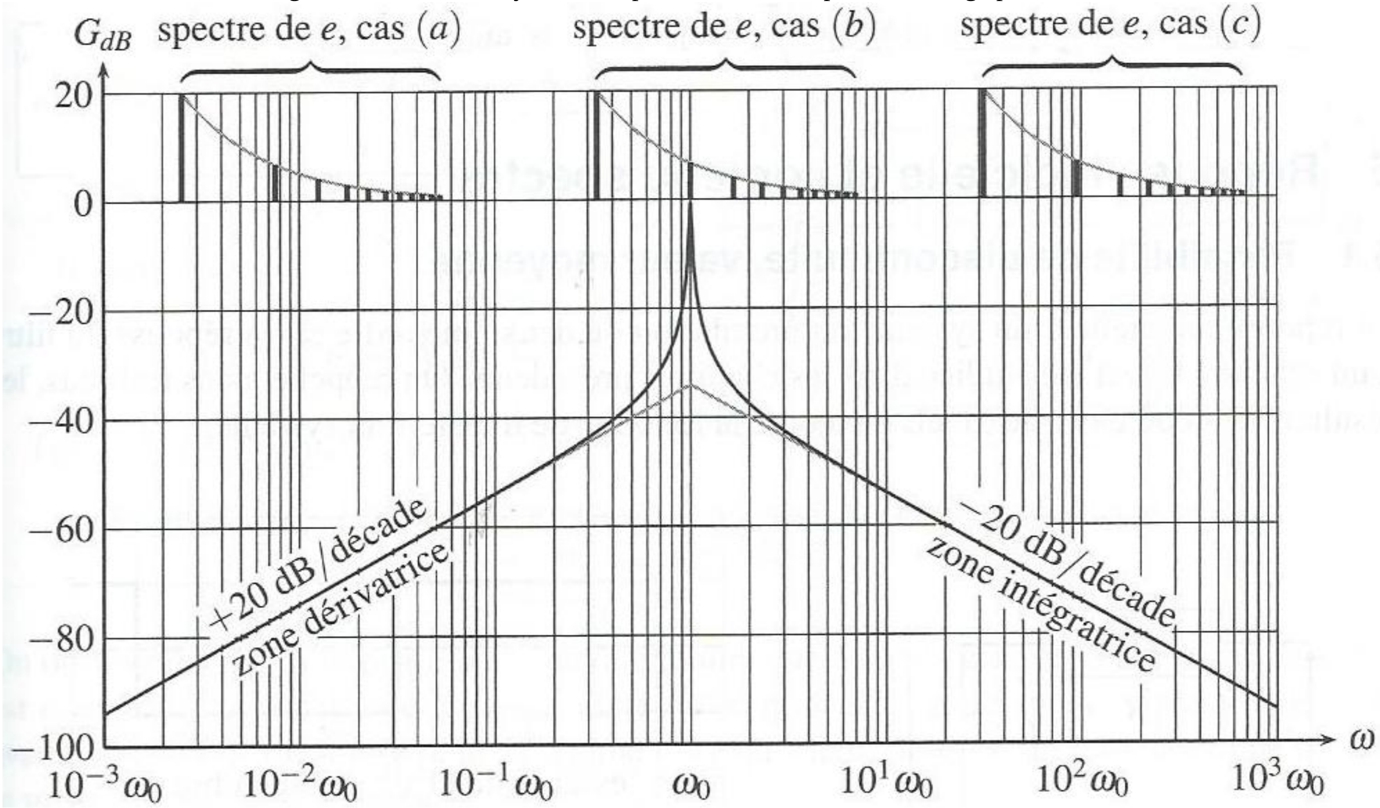
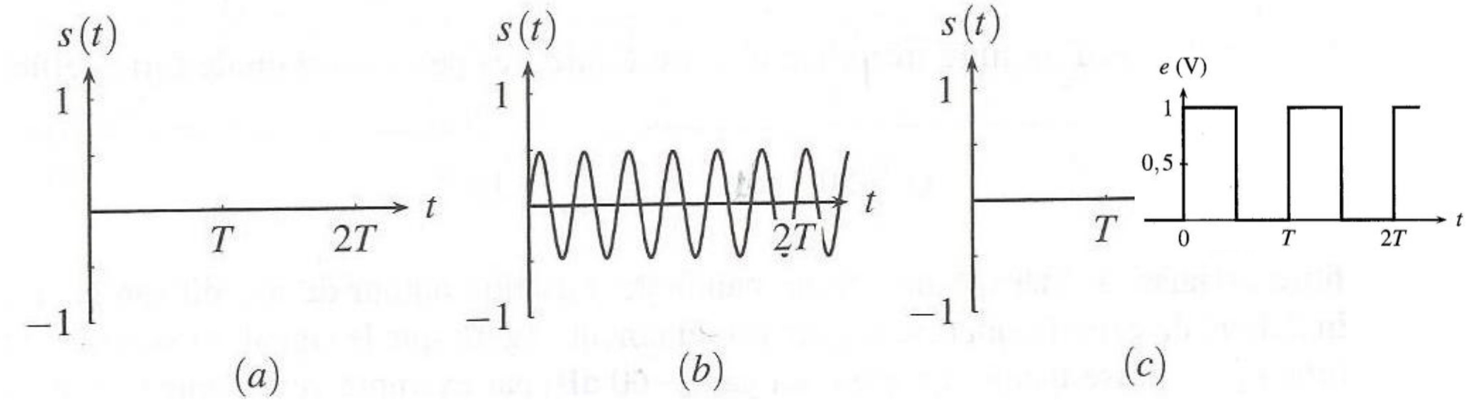


Figure 12.21-Filtrage passe-bande d'un signal créneau



$\omega_s \ll \omega_0$ $3\omega_s = \omega_0$ $\omega_s \gg \omega_0$

II Utilisation des filtres

1.) Choix d'un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

On est donc amené à définir un gabarit du filtre à construire. Un filtre **passe-bas** a pour fonction de laisser passer toutes les fréquences inférieures à f_p (indice p pour passante) et d'éliminer toutes les fréquences supérieures à f_a (indice a a pour atténuée). On définit alors :

- la dernière **fréquence passante** f_p (le filtre doit laisser passer les fréquences $f < f_p$),
- le **gain minimum** G_{sup}, en dB, pour les fréquences qui passent à travers le filtre (il ne doit pas être trop faible, car ces fréquences doivent sortir du filtre sans être atténuées),
- la première **fréquence atténuée** f_a (toutes les fréquences $f > f_a$ doivent être éliminées par le filtre),
- le **gain maximum** G_{inf} pour les fréquences atténuées. Le gain du filtre à ces fréquences doit être inférieur à G_{inf} pour être sûr qu'elles soient éliminées.

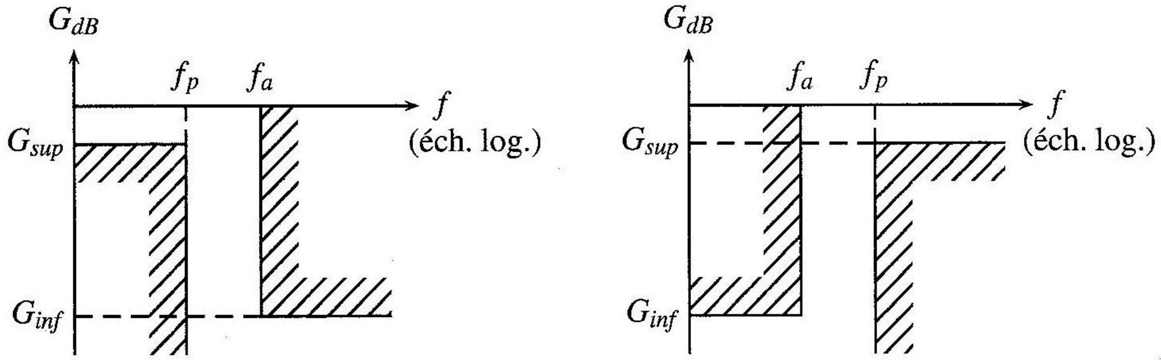


Figure 11.25 – Gabarit (a) d'un passe-bas (b) d'un passe-haut.

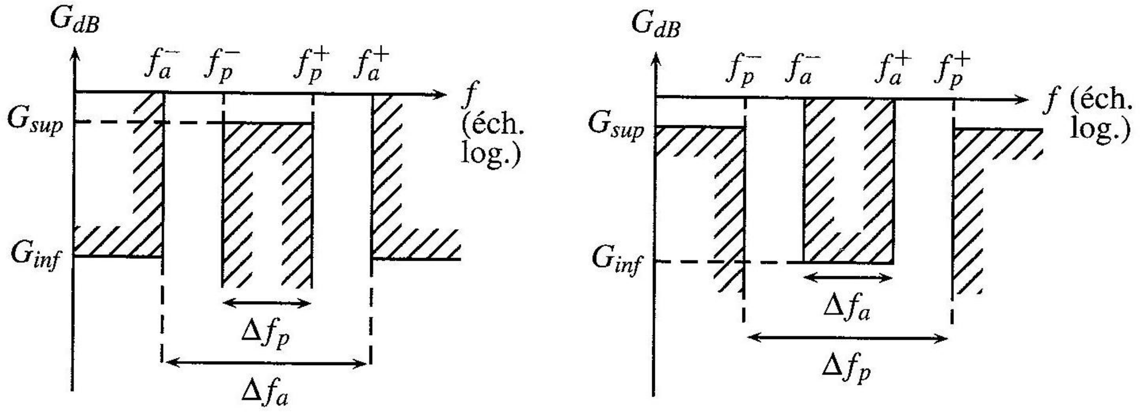
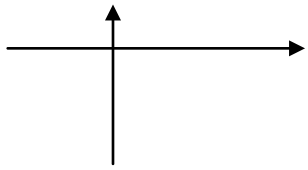
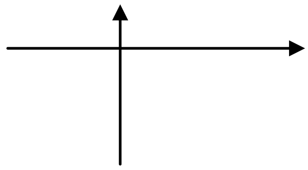
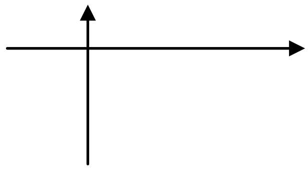
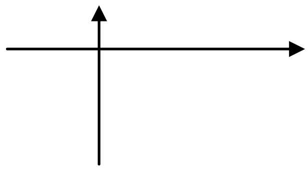
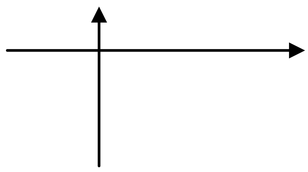
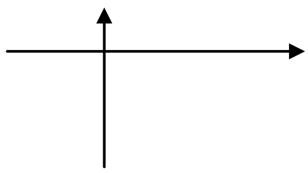


Figure 11.26 – Gabarit (c) d'un passe-bande (d) d'un coupe-bande.

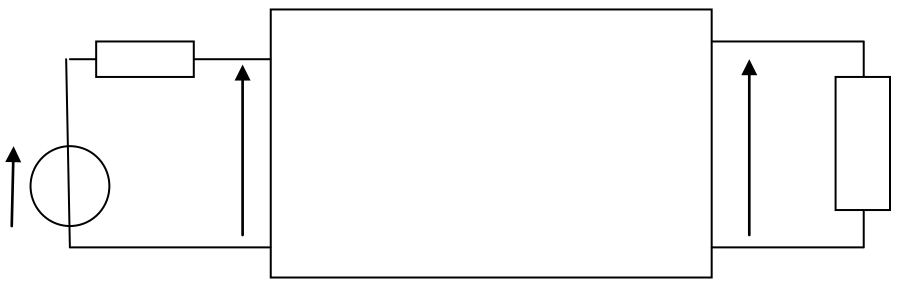
2.) Catalogue de filtres.

Passe bas	Permet de recueillir l'information sur la forme générale du signal. Moyenneur.	
Premier ordre : - RC série sortie sur C - RL série sortie sur R (TD)	$\underline{H} = \frac{1}{1+jx} H_0$	Intégrateur à haute fréquence 
Second ordre : - RLC série sortie sur C	$\underline{H} = \frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} H_0$	Double intégrateur à haute fréquence 
Passe haut	Permet de recueillir l'information relative aux détails du signal. Elimine la valeur moyenne.	
Premier ordre : - RC série sortie sur R - RL série sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \frac{jx}{1+jx} H_0$	Dérivateur à basse fréquence 
Second ordre : - RLC série sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \frac{-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} H_0$	Double dérivateur à basse fréquence 

Passe bande	Sélectionne une fréquence particulière. Coupe les hautes et basses fréquences.	
Second ordre : - RLC série sortie sur R	$\underline{H} = \frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})} H_0$	Dérivateur à basse fréquence Intégrateur à haute fréquence 
Coupe bande	Elimine une fréquence particulière.	
Second ordre : - RLC série sortie sur (L,C) (TD)	$\underline{H} = \frac{1-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} H_0$	

3.) Mise en cascades de deux filtres.

a) Impédances d'entrée et de sortie.



Impédance d'entrée : $\boxed{\underline{Z}_e = \frac{\underline{u}_e}{\underline{i}_e}}$ En présence de $\underline{Z}_u$: impédance d'entrée en charge.

En l'absence de $\underline{Z}_u$: impédance d'entrée à vide.

On a un dipôle linéaire passif vu de l'entrée (entre A et B) : il est modélisable depuis l'entrée par une impédance équivalente puisqu'il ne contient pas de générateur.
Pour la calculer, on débranche le générateur et on fait des schémas équivalents.

Impédance de sortie

On a un dipôle linéaire actif vu de la sortie (entre C et D) : il est modélisable depuis la sortie par un générateur équivalent de Thévenin.

Pour la calculer, on débranche la charge et on fait des schémas équivalents. $\boxed{\underline{Z}_s = -\frac{\underline{u}_s}{\underline{i}_s}}$

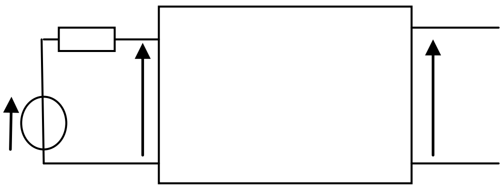
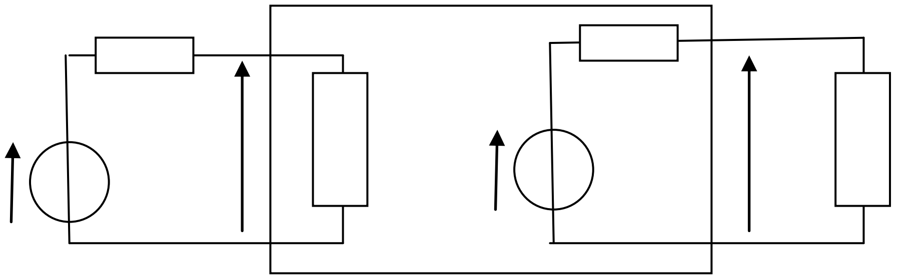
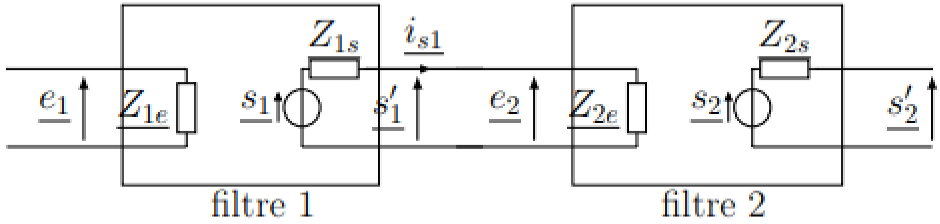


Schéma équivalent global :



b) Mise en cascade.



On veut : $\underline{H} = \frac{\underline{s_2}}{\underline{e_1}} = \frac{\underline{s_2}}{\underline{e_2}} \times \frac{\underline{s_1}}{\underline{e_1}} = \underline{H_2} \times \underline{H_1}$

Pour trouver ce résultat, il faut : $\underline{i_{s1}} = 0$, soit $\underline{Z_{2e}} \gg 1$ et $\underline{e_2} = \underline{s_1}$ soit $\underline{Z_{2e}} \gg \underline{Z_{1s}}$
C'est ce qu'on appelle l'adaptation d'impédance.

4.) Exemple de filtre non linéaire : le multiplieur

On aura en sortie : $s(t)=k.e_1(t).e_2(t)$ où k est le gain du multiplieur (en V^{-1}).

Si $e_1(t) = e_2(t) = E_0\, cos(\omega_e\, t)$,
alors $s(t) = kE_0^2 cos^2(\omega_e t) = kE_0^2 \frac{1+\cos(2\omega_e t)}{2}$

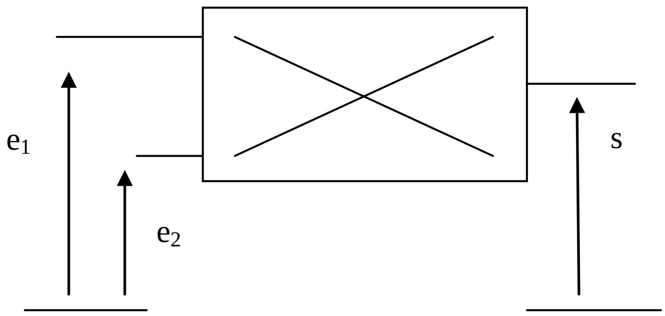
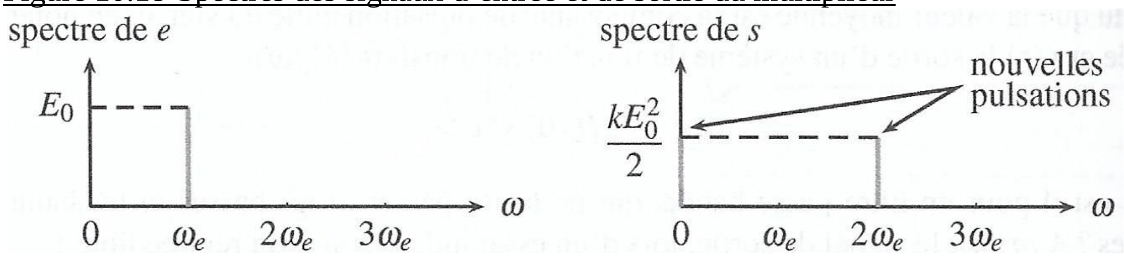


Figure 10.18-Spectres des signaux d'entrée et de sortie du multiplieur



III Capacité numérique : Simuler l'action d'un filtre sur un signal périodique.

```python
##exemple du signal créneau et des filtres passe bas et passe haut du premier ordre (variable fo)

##importation des bibliothèques

import numpy as np
import scipy.integrate as spi
import matplotlib.pyplot as plt

##definition des filtres du premier ordre:
##Filtre passe bas
def passebas(f,fo):#définition du module de H#
    x=f/fo
    h=1/(1+x**2)**(0.5)
    return(h)

def phasebas(f,fo):#définition du l'argument de H#
    x=f/fo
    phib=-np.arctan(x)
    return(phib)

##Filtre passe haut
def passehaut(f,fo):
    x=f/fo
    h=x/(1+x**2)**(0.5)
    return(h)

def phasehaut(f,fo):
    x=f/fo
    phih=-np.arctan(x)+np.pi/2
    return(phih)

##spectre du signal d'entrée créneau:

F=[0] #frequence nulle
f=1000 #fondamental
N=200 #nombres d'harmoniques
for k in range(1,N):#Les fréquences des harmoniques#
    y=f*k
    F.append(y)


Ae=[0.5] #composante continue
A=1 #amplitude du fondamental
for k in range(1,N):#cas d'un signal creneau
    if k%2==0:
        y=0
    else:
        y=A/k
    Ae.append(y)

##fonction produit de listes:

def prod(A,B):
    C=[]
    for k in range(len(A)):
        x=A[k]*B[k]
        C.append(x)
    return(C)
```

```python
##calcul du spectre en sortie

fo=2000 #fréquence de coupure du filtre#

Hpb=[passebas(freq,fo) for freq in F]#création de la liste des amplitudes#
Aspb=prod(Hpb,Ae)
phipb=[phasebas(freq,fo) for freq in F]#création de la liste des arguments#

Hph=[passehaut(freq,fo) for freq in F]
Asph=prod(Hph,Ae)
phiph=[phasehaut(freq,fo) for freq in F]
```

```python
##tracé des courbes

##effet du passe bas

plt.bar(F,Ae,200,color='r',label="Signal d'entrée")
plt.bar(F,Aspb,100,color='b',label='Signal de sortie du passe-bas')

plt.xlabel('frequences')
plt.ylabel('An')
plt.axis([-2000,20000,0,1])
plt.title('spectres de fréquence')
plt.legend()


##effet du passe haut
plt.figure()
plt.bar(F,Ae,200,color='r',label="Signal d'entrée")
plt.bar(F,Asph,100,color='b',label='Signal de sortie du passe-haut')

plt.xlabel('frequences')
plt.ylabel('An')
plt.axis([-2000,20000,0,1])
plt.title('spectres de fréquence')
plt.legend()



##Courbes temporelles
les_t=np.linspace(0,3/f,2000)#intervalle de temps

les_e=[]#Création de la liste des amplitudes pour la tension d'entrée#
les_sb=[]#Création de la liste des amplitudes pour la tension de sortie#
les_sh=[]

for t in les_t:
    e=Ae[0]
    sb=Aspb[0]
    sh=Asph[0]
    for k in range (1,N):
        e=e+Ae[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t)
        sb=sb+Aspb[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t+phipb[k])
        sh=sh+Asph[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t+phiph[k])
    les_e.append(e)
    les_sb.append(sb)
    les_sh.append(sh)

plt.figure()
plt.plot(les_t,les_e)
plt.title('signal d entrée: e(t)')
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('e(V)')
plt.figure()
plt.plot(les_t,les_sb)
plt.title('s(t) pour le filtre passe bas')
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('e(V)')
plt.figure()
plt.plot(les_t,les_sh)
plt.title('s(t) pour le filtre passe haut')
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('e(V)')

plt.show()
```