

DS 1 : Optique, analyse dimensionnelle et électrocinétique-

Samedi 04 octobre

PTSI La Martinière Monplaisir

Durée : 4 heures

⇒ Les calculatrices sont interdites ⇐

Veiller à la clarté de la rédaction et à l'homogénéité des équations. Présenter les résultats sous forme littérale avant de faire les applications numériques. Mettre en évidence (encadrer, souligner...) les résultats. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement ajusté au moment de la correction. Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être abordées dans l'ordre de votre choix.

On donne les formules de conjugaison et de grandissement pour une lentille mince de distance focale image $f' = \overline{OF'}$ et de distance focale objet $f = \overline{OF} = -f'$:

Avec origine au centre (Descartes) : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ et $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

Avec origine aux foyers (Newton) : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$ et $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$.

I L'instabilité Washboard (environ 9% des points)

Lorsqu'une route en sable ou en gravier est soumise au passage répété de véhicules, des bosses régulièrement espacées apparaissent à sa surface. Ce phénomène, appelée instabilité de tôle ondulée (washboard road), est d'une part très gênant pour les passagers et d'autre part très dangereux à cause de la perte d'adhérence induite par les bosses.

Expérimentalement, on constate que cette instabilité apparaît uniquement si les voitures se déplacent au-delà d'une vitesse critique v_c . On remarque également que ce phénomène ne dépend que des paramètres suivants : la masse m du véhicule, la largeur du pneu L , la masse volumique ρ de la piste, l'accélération de la pesanteur g et bien sûr la vitesse v du véhicule.

1. À partir de ces paramètres, on peut construire un nombre sans dimension appelé nombre de Froude et noté Fr . Déterminer une expression de Fr , sachant que la masse volumique et la largeur interviennent avec la même puissance dans l'expression du nombre de Froude, et que Fr est inversement proportionnel à g .

2. Sachant que l'instabilité de tôle ondulée apparaît lorsque le nombre de Froude est supérieur à nombre de Froude critique Fr_c (en considérant une expression du nombre de Froude qui est une fonction croissante de la vitesse), donnez l'expression de la vitesse critique v_c en fonction de Fr_c et des paramètres du problème.

3. La vitesse critique pour un camion vide de masse $m_1 = 10$ tonnes est de $v_{c1} = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. On note v_{c2} la vitesse critique du même camion lorsqu'il est chargé, sa masse valant alors $m_2 = 28$ tonnes.

Exprimer le rapport des vitesses critiques en fonction des masses. En déduire la valeur numérique de v_{c2} .

Donnée : $2,8^{(1/4)} \simeq 1,3$.

II Arc-en-ciel (environ 23% des points)

Lorsque le beau temps revient juste après une averse, on observe parfois la formation d'un arc-en-ciel à l'horizon. Il s'agit d'un phénomène optique de dispersion de la lumière solaire, qui se réfracte et se réfléchit dans des gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. La première théorie permettant d'expliquer ce phénomène a été établie par Descartes en 1637 à l'aide des lois de la réflexion et de la réfraction. Il mit en évidence qu'un observateur situé au niveau du sol reçoit un faisceau de rayons émergents correspondant au maximum de l'angle de déviation des gouttelettes d'eau. Comme celui-ci dépend de la longueur d'onde des rayons lumineux, on peut ainsi observer la dispersion de la lumière solaire. Dans cette partie, nous allons mettre en évidence les principaux résultats de cette théorie.

On considère un rayon lumineux monochromatique issu du soleil S , qui arrive sur une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air sous un angle d'incidence i_1 , comme représenté sur la figure II.1. Après une première réfraction, une réflexion et une seconde réfraction, le rayon émerge de la gouttelette sous un angle de réfraction i_4 . Il se dirige alors vers un observateur E situé au niveau du sol. On suppose que l'air est un milieu d'indice optique égal à 1, et on note n l'indice optique de l'eau.

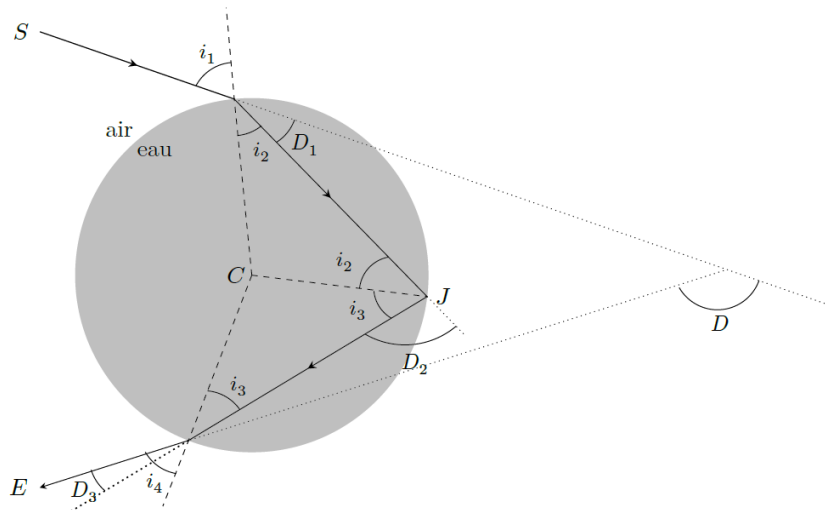


FIGURE II.1 – Trajet d'un rayon lumineux dans une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air.

Sur la figure II.1, les angles représentés sont tous considérés comme positifs.

1. Exprimer les angles de déviation D_1 , D_2 et D_3 à chaque interface en fonction de i_1 , i_2 , i_3 et i_4 .
2. À l'aide des lois de Snell-Descartes, exprimer les angles i_2 , i_3 et i_4 en fonction de i_1 et n .
3. En déduire que l'angle de déviation totale D peut s'exprimer

$$D = 2i_1 - 4 \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right) + \pi,$$

avec $\arcsin$ la fonction trigonométrique réciproque définie par $\sin(\arcsin(x)) = x$.

On représente l'évolution de D en fonction de i_1 sur la figure II.2, en prenant $n = 1.33$ pour l'indice optique de l'eau. L'angle de déviation présente un minimum $D_{\min}$ pour un certain angle d'incidence $i_{1,\min}$ qui correspond au faisceau de rayons émergents reçu par l'observateur.

On rappelle que la dérivée de la fonction trigonométrique $f(x) = \arcsin(x)$ s'exprime :

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Il n'est pas nécessaire de traiter cette question pour aborder la suite. Montrer que l'angle d'incidence $i_{1,\min}$ vérifie l'équation suivante :

$$\sin(i_{1,\min}) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

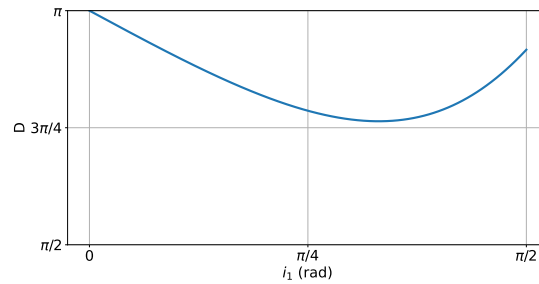


FIGURE II.2 – Évolution de l’angle de déviation D en fonction de l’angle d’incidence i_1 .

5. En déduire l’expression du minimum D_{min} en fonction de n .
On représente l’évolution de D_{min} en fonction de n sur la figure II.3, pour $1 \leq n \leq 2$.

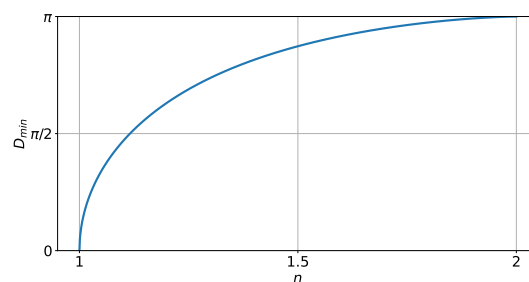


FIGURE II.3 – Évolution de l’angle de déviation minimale D_{min} en fonction de l’indice optique n .

L’eau étant un milieu dispersif, son indice optique n dépend de la longueur d’onde λ du rayon lumineux considéré. En 1836, Cauchy établit que l’indice optique d’un tel milieu peut s’exprimer sous la forme :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

avec A et B des constantes positives caractéristiques du milieu.

6. Comment évolue le minimum D_{min} lorsque la longueur d’onde λ augmente ? Justifier votre raisonnement.
7. Rappeler l’intervalle de longueur d’onde constituant le spectre visible.
8. Pour quelle couleur D_{min} sera-t-il le plus grand ?
9. Sur le schéma très simplifié de la goutte ci-dessous, deux rayons émergents correspondant aux deux couleurs extrêmes du spectre sont représentés (ils correspondent à des incidents parallèles non représentés). Indiquer pour chacun leur couleur.

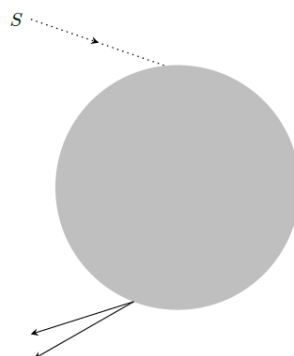


FIGURE II.4 – Schéma simplifié du trajet d’un rayon lumineux dans une goutte d’eau.

10. Lorsque l'observateur E situé au niveau du sol regarde l'arc-en-ciel, il voit l'anneau rouge au-dessus de l'anneau violet : cela vous paraît-il cohérent ? Justifier brièvement.

III Autofocus d'appareil numérique (environ 37% des points)

Nous nous intéressons dans ce sujet à l'étude de différentes méthodes permettant de réaliser l'autofocus sur les appareils photos numériques. L'autofocus consiste à régler de manière automatique la netteté de l'image avant d'effectuer la prise de vue.

Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif, sauf contre ordre.

Un appareil photo est modélisé par une lentille mince convergente (L), l'objectif, de focale $f'_0 = 10\text{ cm}$ et un plan récepteur (P) placé orthogonalement à l'axe optique. Ce plan récepteur est de taille $20\text{ mm} \times 30\text{ mm}$ et contient 6 méga pixels.

Lorsque le réglage de l'appareil est optimal, l'image de l'objet à photographier se trouve sur le plan (P). Sinon, il convient de modifier la position de ce plan.

Prenons l'exemple d'un objet réduit à un point objet A_0 qui donne un point image A . En cas de défaut de réglage, on a la situation décrite sur la figure III.1.

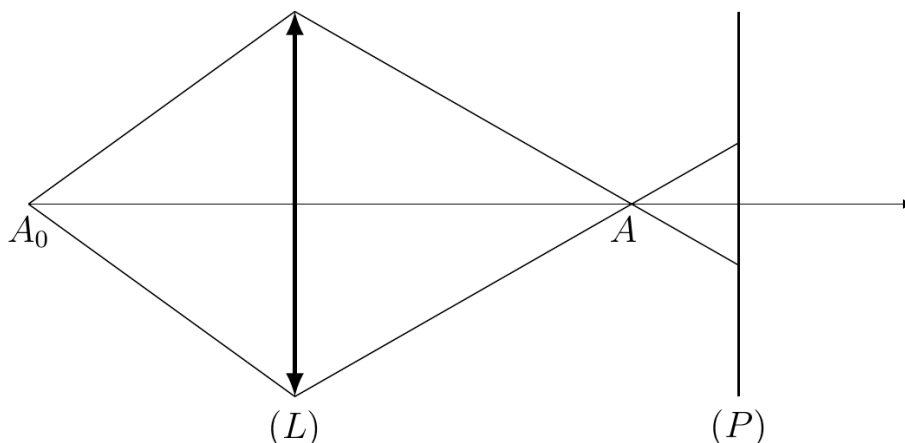


FIGURE III.1 – Défaut de réglage.

Sur (P) se forme alors une tache à la différence d'un point.

Il faut donc déplacer le plan (P) d'une certaine distance pour obtenir une image nette. Pour cela, la méthode la plus rapide consiste à calculer cette distance à partir de la différence d'ordonnées des points inférieurs et supérieurs de la tache.

Il y a cependant une difficulté du fait que l'on obtient la même tache que (P) soit placé devant ou derrière l'image. Nous allons étudier un dispositif astucieux qui permet de calculer algébriquement le déplacement à opérer partant d'un défaut de réglage.

III.1 Mise au point

Dans cette partie on attend, pour chaque question, une expression littérale puis une valeur numérique.

On souhaite photographier un objet de hauteur $h = 10\text{ cm}$, transverse à l'axe de l'objectif et situé à une position $x_0 = -2\text{ m}$, l'origine étant prise au centre de la lentille (L). L'axe optique est orienté de la gauche vers la droite.

1. À quelle distance d' du centre de la lentille (L) faut-il placer (P) pour avoir une image nette (ceci définit le plan P_0) ? Donner la taille h' de l'image.

On se place dans le cas où l'objet précédent se ramène à un point situé sur l'axe toujours à la position $x_0 = -2\text{ m}$. (P) est placé à une distance $\delta = +0,5\text{ cm}$ derrière P_0 . La lentille a un rayon $a = 5\text{ cm}$ (figure III.2). On observe alors une tache lumineuse sur (P).

2. Faire un schéma et tracer les rayons qui parviennent à l'extrémité de cette tache. Déterminer le rayon a' de la tache lumineuse formée sur (P) .

NB : le rayon de la lentille a est défini par la hauteur de lentille par rapport à l'axe optique (figure III.2).

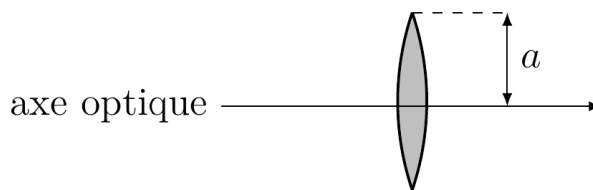


FIGURE III.2 – Illustration de la lentille.

3. Après avoir déterminé la taille d'un pixel, supposé carré, donner un critère sur a' , puis sur δ pour que l'image transmise par le capteur soit nette.

III.2 Principe simplifié de l'autofocus

Dans un souci de simplification on considère un objet réduit à un point objet situé sur l'axe de la lentille (L) qui donne un point image noté A . Pour déterminer si A se trouve ou non sur (P) on utilise deux lentilles annexes (L_1) et (L_2), situées à une distance d_0 de (P) , de focale f' et de rayon a auxquelles sont associées des capteurs plans (P_1) et (P_2) situés à une distance d de chaque lentille.

(P_1) (respectivement (P_2)) est conjugué de (P) par (L_1) (respectivement (L_2)).

Attention : en réalité les deux lentilles sont désaxées par rapport à l'axe optique de (L) , les rayons étant déviés par des miroirs. Ici, on considère simplement que tout se passe comme si (P) est transparent. Le schéma est représenté figure III.3.

4. Exprimer d en fonction de d_0 et f' .

5. On se place dans le cas où A est sur (P) . On note A_1 son image par (L_1) . Faire un schéma représentant A , A_1 , F'_1 (le foyer image de (L_1)) et les rayons issus de A passant par les bords inférieurs et supérieurs de (L_1) .

6. Déterminer, en fonction de a , d et d_0 , l'ordonnée y_1 de A_1 en prenant l'origine O' située sur l'axe (Ox) (on pourra préalablement déterminer l'ordonnée par rapport à l'axe optique de la lentille (L_1)).

En déduire l'expression de y_2 l'ordonnée de A_2 l'image de A par (L_2) en prenant également l'origine en O' .

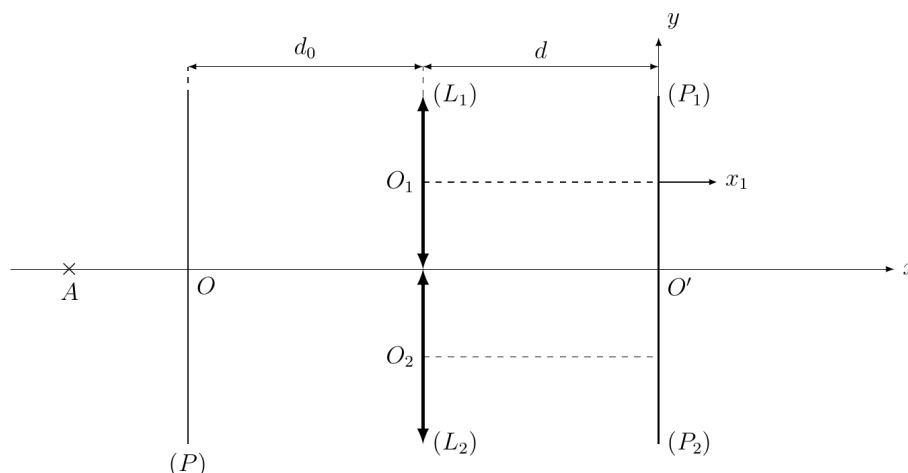


FIGURE III.3 – Principe des lentilles de l'autofocus.

7. Calculer $\Delta\Phi_0 = y_1 - y_2$ (appelé différence de phase, même si c'est une longueur) que l'on exprimera en fonction de d_0 , d et a .

On se place dans le cas où A est avant le plan (P) (cas de la figure III.3) et on pose $\overline{OA} = p$ (mesure algébrique). On note à nouveau A_1 l'image de A par (L_1) .

8. Construire A_1 sur le document réponse en fin d'énoncé (à rendre avec la copie). On note x_1 l'abscisse de A_1 mesurée sur l'axe (O_1x_1) que l'on ne cherchera pas à exprimer et qui sera donc considérée comme une donnée. Déterminer son ordonnée y_1 mesurée à partir de l'axe (Ox) en fonction de a , x_1 , d_0 et p .

9. Sur le document réponse, tracer les rayons issus de A passant par les extrémités des lentilles (L_1) et (L_2) .

On obtient donc deux taches lumineuses. On note y_s l'ordonnée du point supérieur de la tache lumineuse sur (P_1) et y_i l'ordonnée du point inférieur de cette tache, l'origine étant en O' sur l'axe (Ox) .

10. Exprimer y_s en fonction de y_1 , x_1 et d et montrer que .

$$y_i = 2a \left(1 - \frac{d}{x_1} \right) + \frac{dy_1}{x_1}.$$

Le principe de la méthode est de mesurer ce qui est appelé "la différence de phase" définie par $\Delta\Phi = y_s - y'_s$ où y'_s est l'ordonnée du point supérieur de la tache lumineuse sur (P_2) . Ce qui revient à déterminer $\Delta\Phi = y_s + y_i$.

11. Pourquoi a-t-on $y_i = -y'_s$? Montrer que

$$\Delta\Phi = 2a + \frac{2ad}{d_0 - p}.$$

On définit la quantité $\Delta^2\Phi = \Delta\Phi - \Delta\Phi_0$.

12. Évaluer $\Delta^2\Phi$ entre le cas où la mise au point n'est pas réalisée et celui où elle l'est.

Le principe de l'autofocus consiste donc à mesurer la différence de phase et d'en déduire p . Il suffit ensuite de déplacer la lentille (L) afin de faire coïncider A sur (P) . Le déplacement de la lentille se fait au moyen d'un moteur pas à pas.

13. On mesure $\Delta^2\Phi = 0,66 \text{ cm}$. Donner la distance de laquelle on doit translater (P) pour obtenir une image nette. On précisera la direction et le sens de la translation.

On a $d = 2f'$ et $d_0 = 2f'$ avec $f' = 10 \text{ cm}$ et $a = 3 \text{ cm}$. On fera une approximation.

Pour un objet étendu orthogonal à l'axe, on peut montrer que la différence de phase due à chaque point source de l'objet est identique. Le principe de la méthode peut alors être généralisé.

IV Diviseurs de tension et de courant (environ 10% des points)

IV.1 Montage diviseurs idéaux

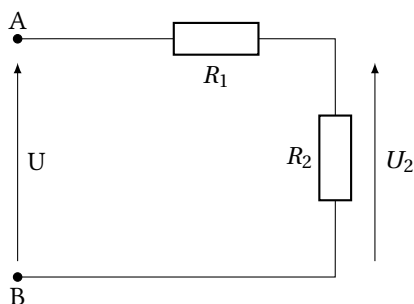


figure 1

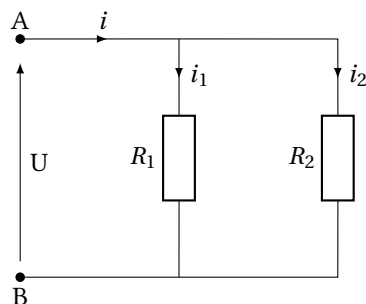


figure 2

1. Les deux résistors de la figure 1 sont montés en série, et l'ensemble est soumis à une tension u . Exprimer la tension u_2 aux bornes de R_2 en fonction de u , R_1 et R_2 .

2. Dans le second montage de la figure 2, les deux résistors sont montés en parallèle. Un courant d'intensité i circule dans le dipôle AB . Exprimer l'intensité i_2 du courant qui circule dans le résistor de résistance R_2 , en fonction de i , R_1 et R_2 .

IV.2 Montages diviseurs réels

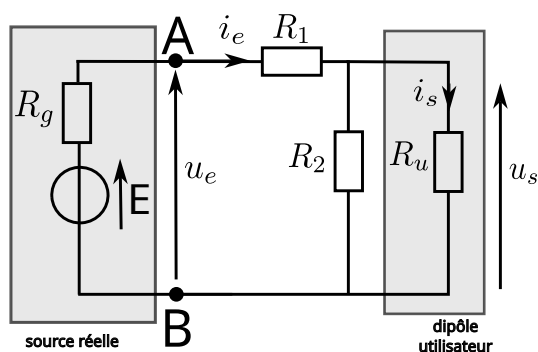


Figure 3

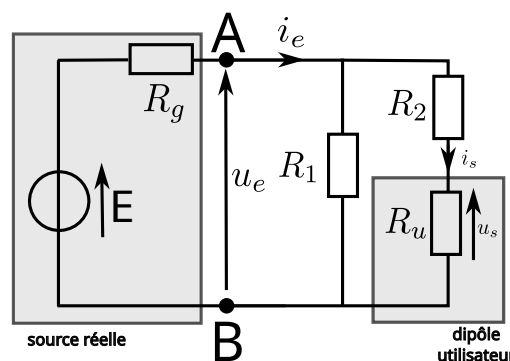


Figure 4

Dans la pratique, i et u sont créés par une source réelle de force électromotrice E et de résistance interne R_g . De plus, les montages sont branchés aux bornes d'un circuit utilisateur passif représenté par un résistor de résistance R_u (figures 3 et 4).

3. Dans le montage de la figure 3 déterminer l'expression de la tension u_s aux bornes du dipôle utilisateur en fonction de E , R_g , R_1 , R_2 et R_u par la méthode de votre choix.

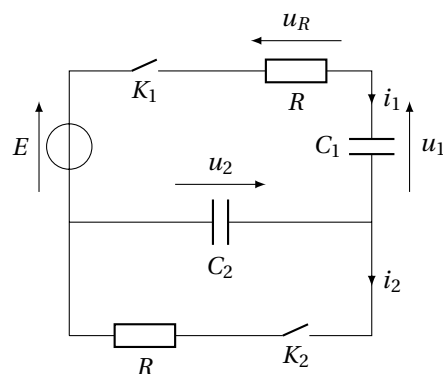
4. Dans le montage de la figure 4 déterminer l'expression de l'intensité i_s du courant dans le dipôle utilisateur en fonction de E , R_g , R_1 , R_2 et R_u par la méthode de votre choix.

V Étude d'un régime transitoire (environ 19% des points)

Le circuit représenté sur la figure ci-contre est constitué d'un générateur de tension idéal stationnaire de force électromotrice (ou tension électromotrice) E , de deux résistors de résistances identiques R et de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 .

Les deux interrupteurs K_1 et K_2 sont initialement ouverts, le condensateur C_2 est déchargé, tandis que C_1 a été chargé préalablement de sorte que la tension à ses bornes vaut initialement $u_1 = E/2$.

À un instant pris comme origine temporelle ($t = 0$, t désignant le temps), on ferme K_1 tout en maintenant K_2 ouvert.



1. Déterminer, à la date $t = 0^+$, c'est-à-dire, juste après la fermeture de K_1 , la tension $u_R(0^+)$.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant i_1 . On fera apparaître une constante de temps τ .

3. En déduire l'expression de $i_1(t)$.

4. Déterminer les expressions de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ après la fermeture de K_1 .

On attend suffisamment longtemps pour que le circuit atteigne son régime établi (i.e. permanent), puis on ferme K_2 (tout en laissant K_1 fermé) à un instant pris comme *nouvelle origine temporelle* ($t = 0$).

5. Déterminer à la date $t = 0^+$, c'est-à-dire, juste après la fermeture de K_2 , l'intensité du courant $i_2(0^+)$ d'une part, et déterminer également sa valeur $i_2(\infty)$ lorsque le nouveau régime établi sera atteint.

Document réponse pour la partie III

NOM :

Prénom :

Cette annexe est à rendre avec la copie, même si vous ne l'avez pas complétée

