

Signaux Electriques

SE5 Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

I Le régime sinusoïdal forcé	2
1.) Exemple : Circuit RLC série.....	2
2.) Méthode de résolution	2
3.) Représentation d'une grandeur sinusoïdale	3
II Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé	4
1.) Position du problème	4
2.) Impédances et admittances	4
III Le circuit RLC série. Etude de l'intensité.....	7
IV Le circuit RLC série. Etude de la tension aux bornes du condensateur	9
V L'oscillateur harmonique amorti	11

Millennium Bridge (Londres) [https://fr.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge_\(Londres\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge_(Londres))

Le pont a été inauguré le 10 juin 2000, avec deux mois de retard et un supplément de 2,2 millions de livres sur un budget initial de 18,2 millions de livres. Cependant il a dû être fermé au public deux jours plus tard, en raison d'un phénomène de résonance, le pont oscillant latéralement de façon imprévue. Ce jour-là, une marche caritative devant traverser le pont attira beaucoup de monde. Les mouvements de balancement furent provoqués par le grand nombre de piétons (90 000 personnes le premier jour avec jusqu'à 2 000 personnes en même temps sur le pont). Les premières vibrations encourageaient et parfois obligeaient les piétons à marcher au rythme du balancement, ce qui accentua les oscillations, même en début de journée lorsque le pont était relativement peu chargé.



Ce mouvement de balancement lui a valu le surnom de *Wobbly Bridge* (pont bancal). Les mesures prises pour limiter le nombre de personnes traversant le pont ont entraîné de longues files d'attente, mais n'ont atténué ni l'enthousiasme du public pour ce *manège qui décoiffe*, ni les vibrations elles-mêmes. La fermeture du pont après seulement trois jours d'ouverture a été sévèrement critiquée par le public, qui associait ce retard à celui dont avait souffert le Dôme du Millenium.

Les phénomènes de résonance des ponts suspendus avaient été bien étudiés depuis la catastrophe du pont du détroit de Tacoma (Washington, États-Unis). Néanmoins peu d'attention avait été prêtée au mouvement latéral produit par des piétons, provoqué par la réaction humaine à des petits mouvements latéraux dans le pont, entraînant un mouvement de pulsion qui n'avait pas été anticipé dans l'analyse statistique avant la construction. On a pensé que le profil exceptionnellement bas des câbles de suspension a contribué au problème, mais une étude menée par des ingénieurs prouve que l'oscillation peut se produire sur n'importe quel pont à suspension ou autre, soumis à un grand mouvement de foule.

Le problème a été résolu par l'installation d'amortisseurs hydrauliques et de masse pour contrôler les oscillations horizontales et latérales. Les travaux ont été menés de mai 2001 à janvier 2002. Après une période d'essai, le pont a été rouvert au public le février 2002 ; depuis, aucune vibration importante n'a été signalée.

Pont du détroit de Tacoma (1940) [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_d%C3%A9troit_de_Tacoma_\(1940\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_d%C3%A9troit_de_Tacoma_(1940))

Le **pont du détroit de Tacoma** ou **pont de Tacoma**, est un pont suspendu qui reliait les villes de Tacoma et de Gig Harbor dans l'État de Washington. Inauguré le 1^{er} juillet 1940, il s'effondre le 7 novembre 1940 lors d'un des plus célèbres accidents de génie civil, sans avoir fait toutefois de victimes.

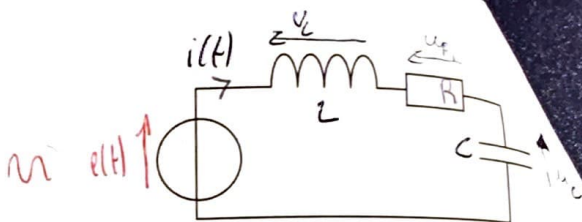
Lors de la rupture de l'ouvrage, la vitesse du vent était d'environ 65 km/h. Des oscillations de grande amplitude en torsion sont apparues à 10 h, menant à l'effondrement du pont à 11 h 10. Le pont avait été dimensionné pour résister au vent, mais en ne tenant compte que des effets statiques¹. En raison du couplage aéroélastique, un échange d'énergie mécanique se produit entre le vent et le pont qui oscille. On dit que le pont est stable lorsque l'énergie mécanique est transférée du pont vers le vent qui la dissipe. Lorsqu'un événement extérieur engendre une petite oscillation initiale, par exemple le passage d'un camion ou une rafale de vent, alors cette oscillation va s'amortir. De plus, le vent n'est jamais parfaitement constant : les petites variations de vitesse autour de la vitesse moyenne suffisent à produire de petites oscillations. Mais si la vitesse moyenne du vent est suffisamment élevée, au-dessus de ce que l'on appelle la « vitesse critique », le pont est instable, et l'oscillation initiale s'amplifie. L'énergie se transfère alors du vent vers le pont, et les oscillations s'amplifient en raison du couplage aéroélastique, jusqu'à la ruine. Ce mécanisme n'était connu en 1940 que pour les structures d'avions (ailes, fuselage, empennage...), personne n'avait alors envisagé ce scénario pour des ponts suspendus³.

Pont de la Maine Angers : https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_de_la_Basse-Chaîne#La_catastrophe_de_1850

I Le régime sinusoïdal forcé

1.) Exemple : Circuit RLC série

<https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Filtres/filtre.php>



géné de fonction sinusoïdale: $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$

On choisit $\varphi_e = 0 \Rightarrow e(t) = E_m \cos(\omega t)$

Equa de maille :

$$e(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$e(t) = \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} \frac{R}{L} + \frac{u_C}{LC} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$e(t) = \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} \frac{R}{L} + \frac{u_C}{LC} \quad \text{pour } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

on s'intéresse pas avant
S.Z. seulement régime permanent $e = E_m \cos(\omega t)$ $\lambda = \frac{R}{2L}$

où $u_{Cf} \rightarrow 0$ (au bout de S.Z.)

u_{Cf} est du même type que le 2nd membre

$$u_{Cf} = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_{uc})$$

W identique pour des circuits linéaires

$\Rightarrow$ Déterminer U_{cm} et φ_{uc}

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{pulsation propre}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

2.) Méthode de résolution

On considère un système linéaire, soumis à une excitation sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$

La réponse $s(t)$ est donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = f(t)$$

où $f(t)$ est une fonction connue de l'excitation $e(t)$ et de ses dérivées temporelles : $f(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_f)$

La solution de l'équation est $s(t) = s_c(t) + s_f(t)$

• $s_c(t)$ est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$$

Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes). Elle s'amortit au bout de quelques temps. On ne s'y intéressera pas dans la suite de ce chapitre.

• $s_f(t)$ est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète) Elle correspond au régime permanent.

Elle est du même type que le second membre : **c'est donc une fonction sinusoïdale, de même pulsation que $e(t)$, indépendante des conditions initiales.** $s_f(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$

s_f correspond au régime sinusoïdal forcé. φ_s est l'avance de phase de s par rapport à e .

En régime sinusoïdal, toutes les grandeurs étudiées sont sinusoïdales de même pulsation que l'excitation.

3.) Représentation d'une grandeur sinusoïdale

a) Représentation temporelle

Grandeur sinusoïdale : $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$

Amplitude G_m

Valeur crête à crête (ou pic à pic) $G_{cc} = 2 G_m$ (Amplitude)

Valeur efficace (en régime sinusoïdal) $G_{eff} = \frac{G_m}{\sqrt{2}}$

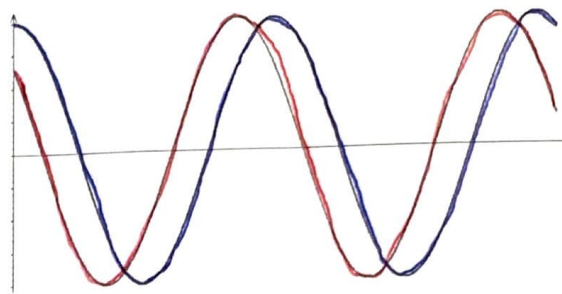
Pulsation (en rad.s^{-1}) ω

Période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Fréquence $f = \frac{1}{T}$

Phase instantanée $\omega t + \varphi$

Avance de phase à l'origine φ



en bleu $f(t) = A \cos(\omega t)$ $\varphi = \omega \Delta t$ où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$

en rouge $g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
 Δt entre 2 max

b) Représentation complexe

$$j^2 = -1 \text{ et } j = \exp(j\pi/2)$$

La représentation complexe de $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$ est la fonction complexe

Notation de Laplace :

$$p = j\omega$$

$$\underline{g}(t) = G_m e^{j(\omega t + \varphi)} = G_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{G}_m e^{j\omega t}$$

↳ la barre = complexe

où $\underline{G}_m = G_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe de $\underline{g}(t)$. Elle est indépendante du temps.

$$\underline{g}(t) = G_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$g(t) = \text{Re}(\underline{g}(t))$$

Module de $\underline{G}_m$: $|\underline{G}_m| = G_m$ est l'amplitude de $g(t)$

Argument de $\underline{G}_m$: $\arg(\underline{G}_m) = \varphi$ est l'avance de phase à l'origine de $g(t)$.

Dériver une fonction complexe sinusoïdale revient à la multiplier par $j\omega$

Intégrer une fonction complexe sinusoïdale revient à la diviser par $j\omega$

• Dérivée : $\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt} (G_m e^{j(\omega t + \varphi)}) = j\omega G_m e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{g}(t)$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{dg}{dt} = \omega G_m e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$\text{Re}\left(\frac{dg}{dt}\right) = \omega G_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = -\omega G_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt} (G_m \cos(\omega t + \varphi)) = -\omega G_m \sin(\omega t + \varphi)$$

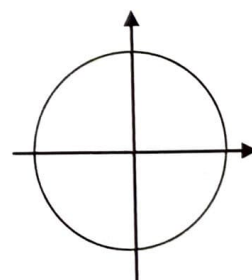
Primitives :

$$\int \underline{g}(t) dt = \int G_m e^{j(\omega t + \varphi)} dt = \left[\frac{G_m}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} \right] = -\frac{G_m}{\omega} e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})} + \text{cte} \Rightarrow \text{Re}\left(\frac{dg}{dt}\right) = -\frac{G_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = \frac{G_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

coste = 0

$$\int g(t) dt = \int G_m \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{G_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) + \text{cte}$$

coste = 0



Somme de deux fonctions de même pulsation

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$\hookrightarrow \underline{g}(t) = \underline{g}_1(t) + \underline{g}_2(t)$$

$$\operatorname{Re}(\underline{g}(t)) = \operatorname{Re}(\underline{g}_1(t) + \underline{g}_2(t)) = \operatorname{Re}(\underline{g}_1(t)) + \operatorname{Re}(\underline{g}_2(t))$$

Remarques :

! ne marche pas pour les produits

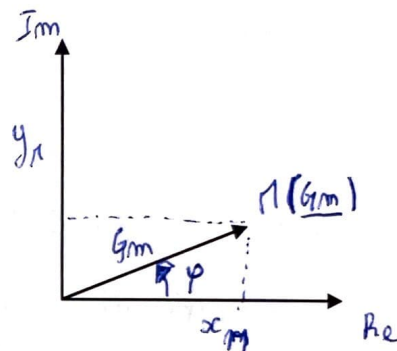
1) La notation complexe d'un signal peut-être utilisée lorsqu'on effectue des opérations linéaires. Elle n'est pas valable pour un produit.

2) Représentation de Fresnel :

$$\underline{G}_m = G_m e^{j\varphi} \\ = G_m \cos \varphi + j G_m \sin \varphi$$

$$\operatorname{Re}(\underline{G}_m) = G_m \cos(\varphi) = x_m$$

$$\operatorname{Im}(\underline{G}_m) = G_m \sin(\varphi) = y_m$$



II Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

1.) Position du problème

- on considère un dipôle linéaire, constitué de dipôles R, L et C en série ou en parallèle.
- on l'alimente par un générateur délivrant une excitation sinusoïdale (tension ou courant).

$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

Hypothèses : Régime quasi-stationnaire. On peut négliger les tps propagation des signaux des les fils. Si la distance parcourue par 1 période (ou longueur d'onde) est très grande devant la longueur des fils.

Lois de Kirchhoff Ce sont des expressions linéaires faisant intervenir i et u.

On admet que les lois de Kirchhoff s'écrivent de la même façon en utilisant la notation complexe.

Loi des nœuds : $\sum_k \varepsilon_k i_k(t) = 0$ ou $\sum_k \varepsilon_k \underline{I}_{km} = 0$ *On simplifie par e^{j\omega t}* ε_k est porteur de signe $\varepsilon_k = +1$ si i_k vers le nœud, -1 sinon.

Loi des mailles : $\sum_k \varepsilon_k u_k(t) = 0$ ou $\sum_k \varepsilon_k \underline{U}_{km} = 0$ $\varepsilon_k = +1$ si u_k ds le sens choisi ; -1 sinon.

2.) Impédances et admittances

a) Définitions

Hypothèses : Dipôle linéaire passif en convention récepteur

parcouru par le courant $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \sim \underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$

où $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$ est l'amplitude complexe

ayant à ses bornes la tension $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \sim \underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$

où $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ est l'amplitude complexe

Impédance complexe du dipôle $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$ *Ohm*

Impédance du dipôle : $Z(\omega) = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m}$ *Ohm*

Avance de phase de u par rapport à i : $\varphi(\omega) = \arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$

$$\underline{Z} = R(\omega) + jX(\omega) \quad |\underline{Z}| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$$

Résistance du dipôle : $R(\omega) = \Re(\underline{Z}) \rightarrow \text{en Ohm}$ Réactance du dipôle : $X(\omega) = \Im(\underline{Z}) \rightarrow \text{en Ohm}$

$$\text{Admittance complexe du dipôle } \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{i}{u} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$$

$$\text{Admittance du dipôle : } Y(\omega) = |\underline{Y}| = \frac{I_m}{U_m} = \frac{1}{Z(\omega)} \rightarrow \text{en Siemens}$$

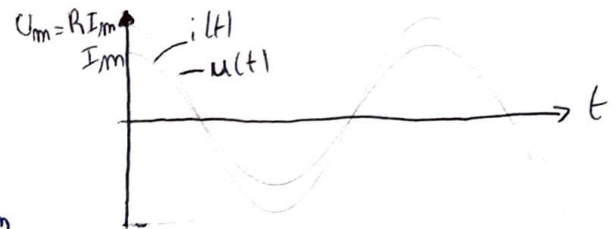
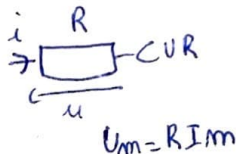
$$\text{Avance de phase de } i \text{ par rapport à } u : \varphi_Y = \arg(\underline{Y}) = \varphi_i - \varphi_u$$

$$\underline{Y} = G(\omega) + jB(\omega) \quad |\underline{Y}| = \sqrt{G^2(\omega) + B^2(\omega)}$$

$$\text{Conductance du dipôle : } G(\omega) = \Re(\underline{Y}) \quad \text{Susceptance du dipôle : } B(\omega) = \Im(\underline{Y})$$

b) Impédance de quelques dipôles :

Conducteur ohmique : (Résistance) R

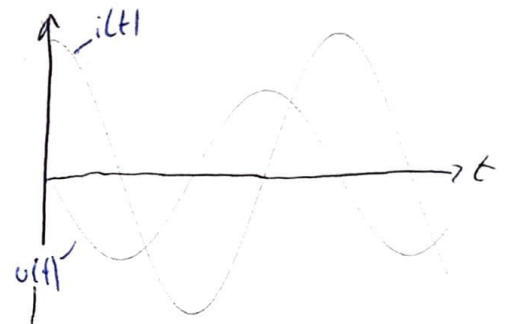


$$u = R i \Rightarrow \underline{u} = R \underline{i}$$

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R \quad \text{or} \quad \underline{Z}_R = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \quad |\underline{Z}_R| = R = \frac{U_m}{I_m}$$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}_R) = 0 = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$$

Bobine idéale d'inductance L



$$u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega L \underline{i}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = j\omega L \quad \text{or} \quad \underline{Z}_L = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$|\underline{Z}_L| = L\omega = \frac{U_m}{I_m} \Rightarrow U_m = L\omega I_m$$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}_L) = \arg(L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} = \varphi_u - \varphi_i$$

u en quadrature avancée par rapport à i

$$\text{Rq: } U_m = L\omega I_m$$

$$\bullet \text{ BF: } \omega \rightarrow 0 \quad \omega = 2\pi f \quad f \rightarrow 0$$

$$U_m \rightarrow 0 \quad \forall I_m \quad L \approx \text{fil}$$

on retrouve régime continu

$$\bullet \text{ HF: } \omega \rightarrow +\infty \quad f \rightarrow +\infty$$

$$I_m = \frac{U_m}{L\omega} \quad I_m \rightarrow 0 \quad \forall U_m \quad L \approx \text{interrupteur ouvert}$$

Condensateur idéal de capacité C : $\rightarrow$ en CVR

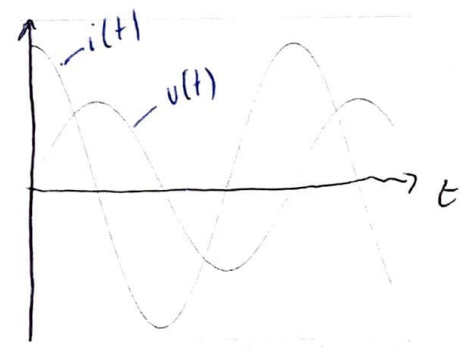
$$i = C \frac{du}{dt} \Rightarrow \underline{i} = C\omega \underline{u} j$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{or} \quad \underline{Z}_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$|\underline{Z}_C| = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_m}{I_m} \Rightarrow U_m = \frac{I_m}{\omega C}$$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}_C) = \arg\left(\frac{1}{j\omega C}\right) = -\frac{\pi}{2} = \varphi_u - \varphi_i$$

$u(t)$ est en quadrature retard i



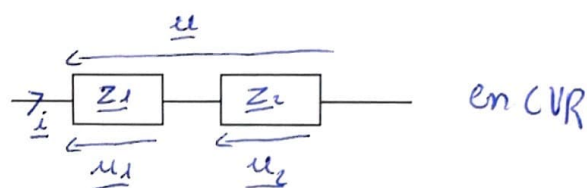
Rq: $U_m = \frac{I_m}{c\omega} \Rightarrow I_m = c\omega U_m$

à BF: $\omega \rightarrow 0$ $f \rightarrow 0$ $I_m \rightarrow 0 \forall U_m$ $C \approx$ interrupt

à HF: $\omega \rightarrow +\infty$ $f \rightarrow +\infty$ $U_m \rightarrow 0 \forall I_m$ $C \approx$ fil

c) Association de dipôles :

- en série : Loi d'Ohm généralisée :



$$\begin{cases} u_1 = Z_1 i \\ u_2 = Z_2 i \end{cases}$$

pt divisem tension

$$\frac{u_1}{u} = \frac{Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (\text{m courant } i)$$

$$u = u_1 + u_2 = (Z_1 + Z_2) i = Z_{eq} i$$

$$\text{ou } Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

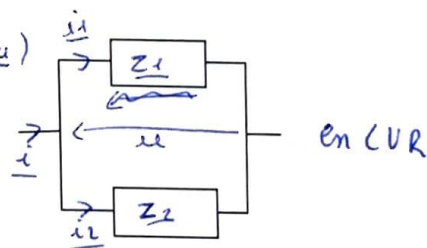
- en parallèle :

$$i_1 = \frac{u}{Z_1} \quad i_2 = \frac{u}{Z_2}$$

$$i = i_1 + i_2 = u \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) = u Z_{eq}$$

pt divisem courant : (m tension u)

$$\frac{i_1}{i} = \frac{\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$$



d) Générateur :

géné Thevenin :

e : f.e.m complexe

z : impédance complexe

$$u = e - z i \Rightarrow z i = e - u$$

du gén

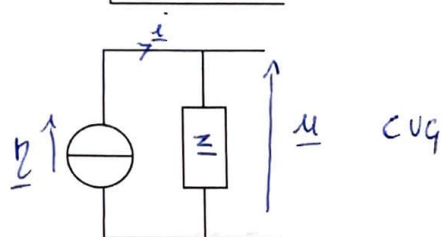
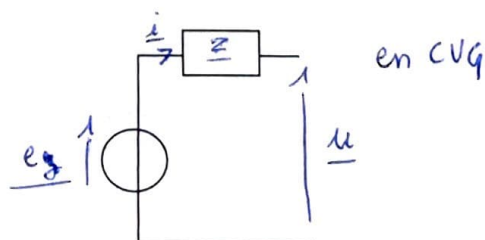
$$\Rightarrow i = \frac{e}{z} - \frac{u}{z}$$

$$\frac{e}{z} = \frac{e}{z} \quad \text{c.e.m complexe}$$

$$\frac{e}{z} = \frac{e}{z} \quad \text{c.e.m complexe du gén Norton (gén de courant)}$$

$\hookrightarrow$ couple électromoteur

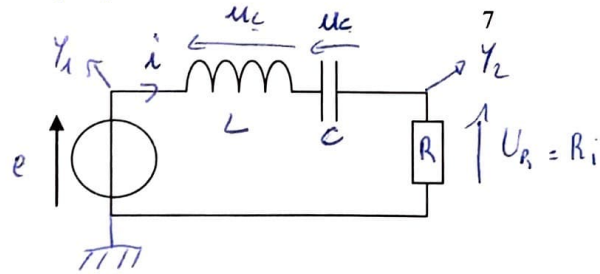
$$\Rightarrow i = \frac{e}{z} - \frac{u}{z}$$



III Le circuit RLC série. Etude de l'intensité

1.) Notation complexe

qd R, L, C réel $u_L, u_C, \dots$ réel



$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

$$\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t} \quad \text{donc } \underline{E_m} = E_m \quad (\text{pas de phase})$$

$\varphi_e = \text{ref des phase } \varphi_e = 0$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (\text{sol forcée})$$

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}$$

$$\underline{i}(t) = \underline{I_m} e^{j\omega t} \quad \text{où } \underline{I_m} = I_m e^{j\varphi_i}$$

$$\underline{e} = (\underline{Z_L} + \underline{Z_C} + \underline{Z_R}) \underline{i} \quad (3)$$

$$\underline{e} = \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R \right) \underline{i} \quad (1)$$

$$\frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad j^2 = -1$$

$$\frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{1}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$\frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{I_m}{E_m} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (2)$$

on simplifie
par $e^{j\omega t}$

Rq 1: Obtention de l'équ dif

$$\textcircled{1} \quad \underline{e} = L j\omega \underline{i} + R \underline{i} + \frac{1}{C j\omega} \underline{i}$$

$$\underline{e} = L \frac{d\underline{i}}{dt} + R \underline{i} + \frac{1}{C} \int \underline{i} dt$$

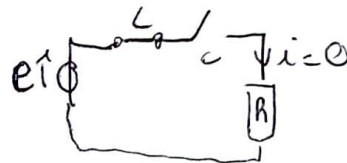
$$\Rightarrow L \frac{d^2 \underline{i}}{dt^2} + R \frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{\underline{i}}{C} = \frac{d\underline{e}}{dt} \quad (1')$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \underline{i}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{\underline{i}}{LC} = \frac{1}{L} \frac{d\underline{e}}{dt}$$

en passant par $\text{Re}(1')$

Rq 2: schéma équivalent

BF: $f \rightarrow 0 \quad \omega = 2\pi f \rightarrow 0$
(1^{er} modèle) qu'en régime continu



HF: $f \rightarrow +\infty \quad \omega = 2\pi f \rightarrow +\infty$



2) Etude de l'Amplitude en fonction ω

$$\textcircled{2} \Rightarrow \frac{I_m}{E_m} = \left| \frac{\underline{I_m}}{\underline{E_m}} \right| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{Rq: } z = x + jy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\underline{\omega \rightarrow 0} \quad \omega L \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\omega C} \rightarrow +\infty \quad \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \rightarrow +\infty$$

$I_m \rightarrow 0$

$$\underline{\omega \rightarrow +\infty} \quad \omega L \rightarrow +\infty \quad \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0 \quad \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \rightarrow +\infty$$

$I_m \rightarrow 0$

Recherche d'1 max: $f(\omega) = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 > 0$

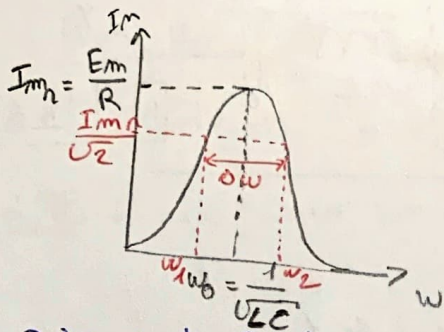
$$f'(\omega) = \left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right) \times 2 \times \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 \quad \text{recherche max}$$

$$\Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

pulsation propre

$$I_m(\omega_0) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2}} = \frac{E_m}{R} = I_m \quad \text{à } \omega_0 \text{ on a la résonance}$$

Résonance d'intensité: max de I_m quand ω varie



3) Etude de la phase en fonction de ω

$$\textcircled{2} \Rightarrow \underline{I_m} = \frac{E_m}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{E_m}{\underline{D_{em}}}$$

$$\text{ou } \underline{D_{em}} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

$$\varphi_i = \text{Arg}(\underline{I_m}) = \text{Arg}\left(\frac{E_m}{\underline{D_{em}}}\right) = \text{Arg}(E_m) - \text{Arg}(\underline{D_{em}})$$

$$\text{Arg}(E_m) = 0 \quad (E_m \in \mathbb{R})$$

$$\varphi_i = -\text{arg}(\underline{D_{em}}) = -\varphi_{\text{dem}}$$

$$\text{Rq: } \underline{z} = x + jy = |z| \times \left(\frac{x}{|z|} + j\frac{y}{|z|}\right) = |z| e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

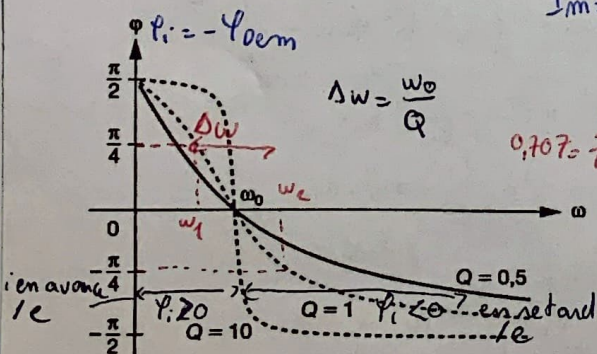
$$\cos(\varphi_{\text{dem}}) = \frac{R}{|\underline{D_{em}}|} \geq 0 \Rightarrow \varphi_{\text{dem}} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\varphi_{\text{dem}}) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{|\underline{D_{em}}|}$$

$$\tan(\varphi_{\text{dem}}) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\text{BF: } \omega \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow \infty \quad L\omega \rightarrow \infty \quad \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0 \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} \rightarrow \pm \infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_{\text{dem}} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_{\text{dem}} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$



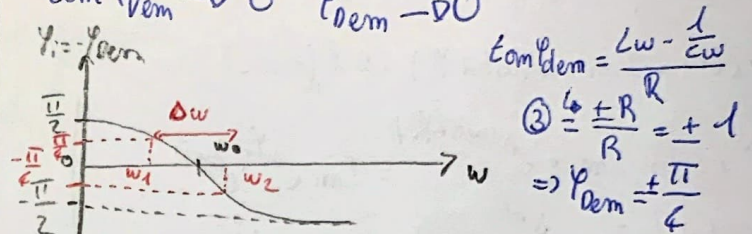
Q = notation de phase plus rapide (va + vite vers asymptote)
 $i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$

$$\text{HF: } \omega \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow 0 \quad L\omega \rightarrow \infty \quad \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_{\text{dem}} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_{\text{dem}} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \rightarrow 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi_{\text{dem}} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_{\text{dem}} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$



4) Bande passante (-3dB)

Intervalle de pulsation pr le quel

$$\underline{I_m} \geq \frac{I_{m0}}{\sqrt{2}}$$

Limites de la bande passante tq $I_m = \frac{I_{m0}}{\sqrt{2}}$

$$\text{cfr: } \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 = 2R^2$$

$$\Rightarrow (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 = R^2$$

$$\Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

$$\Rightarrow LC\omega^2 - 1 = \pm RC\omega \Rightarrow LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$$

$$\Delta = R^2 C^2 + 4LC > 0$$

$$\omega = \frac{\pm RC \pm \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\omega_1 = \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} > 0 \quad \omega_2 = \frac{-RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} > 0$$

$$\text{Longueur de la bde passante } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\Delta\omega = \frac{2RC}{2LC} = \frac{R}{L}$$

$$\text{On pose } Q \text{ tq } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L} \times \frac{\sqrt{LC}}{1} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q} \Rightarrow Q = \frac{1}{R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

$$\frac{U_{RO}/U_{ROmax}}{I_m/I_{m0}} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L} \times \frac{\sqrt{LC}}{1} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q} \Rightarrow Q = \frac{1}{R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

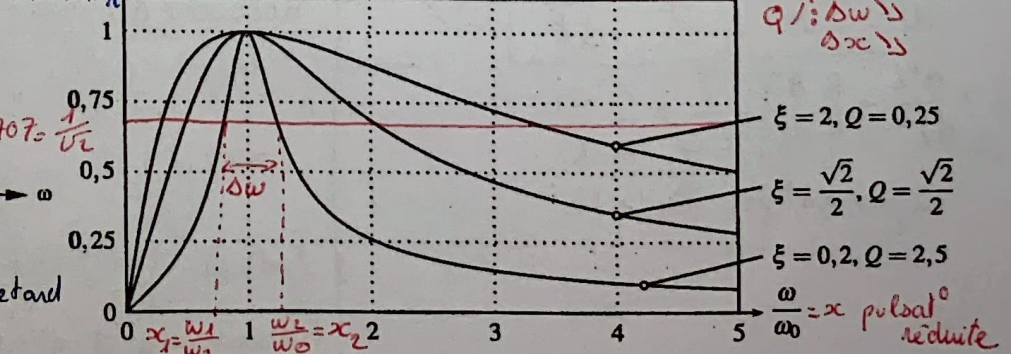
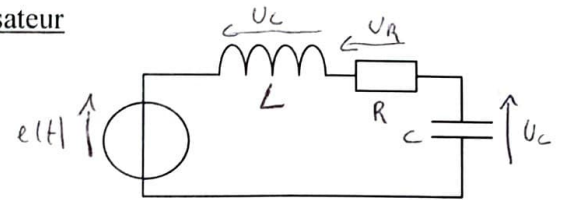


Figure 10.17 - Rapports de l'amplitude de u_R à sa valeur maximale (R variable).

IV Le circuit RLC série. Etude de la tension aux bornes du condensateur

1.) Notation complexe



$$e(t) = E_m \cos(\omega t) \rightarrow \underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$$

$$\varphi_c = 0 \text{ (ref des phases)} \quad \text{ou } \underline{E}_m = E_m$$

$$u_c(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_{uc}) \rightarrow \underline{u}_c(t) = U_{cm} e^{j(\omega t + \varphi_{uc})}$$

$$\underline{u}_c(t) = U_{cm} e^{j\omega t} \quad \text{ou } U_{cm} = U_{cm} e^{j\varphi_{uc}}$$

$$\text{Dipôles en série} \quad \underline{e} = (\underline{Z}_L + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C) \underline{i}$$

$$\underline{u}_c = \underline{Z}_C \times \underline{i}$$

$$\frac{\underline{u}_c}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \quad (\text{pt diviseur de tensions})$$

$$\frac{\underline{u}_c}{\underline{e}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega C + \omega L + R} = \frac{1}{1 + Rj\omega C + -L\omega^2} \quad (2)$$

Rq1 Equa diff (1) $\Rightarrow$

$$\underline{u}_c \times (j\omega C + R + \frac{1}{j\omega C}) = \underline{e} \times \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{u}_c R + \frac{d\underline{u}_c}{dt} L + \int \frac{\underline{u}_c}{C} dt = \int \underline{e}$$

$$\frac{d^2 \underline{u}_c}{dt^2} + \frac{d\underline{u}_c}{dt} \frac{R}{L} + \frac{\underline{u}_c}{LC} = \frac{\underline{e}}{LC}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Rq2: schema Eq

• BF: $\omega \rightarrow 0 \quad f \rightarrow 0 \quad i = 0 \quad u_R = 0$
 $\underline{e} = \underline{u}_L + \underline{u}_R + \underline{u}_C$
 $\underline{u}_C = \underline{e}$

• HF: $\omega \rightarrow +\infty \quad f \rightarrow +\infty$

$$\underline{e} = \underline{u}_L + \underline{u}_R + \underline{u}_C \quad \underline{u}_C = 0$$

$$\frac{\underline{u}_c}{\underline{e}} = \frac{U_{cm} e^{j\omega t}}{E_m e^{j\omega t}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Passage sous forme canonique:

$$\frac{U_{cm}}{E_m} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{R\omega}{\omega_0 L} \times \frac{\omega_0}{\omega_0}}$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{polarisation reduite}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \times \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{L}{R} \times \frac{1}{LC\omega_0} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\frac{U_{cm}}{E_m} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad (3)$$

2) Amplitude en fct de x

$$(3) \Rightarrow \left| \frac{U_{cm}}{E_m} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{cm}}{E_m} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = \frac{1}{f(x)}$$

BF: $\omega \rightarrow 0 \quad f \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0 \quad f(x) \rightarrow 1$

$$\frac{U_{cm}}{E_m} \rightarrow 1$$

HF: $\omega \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad f(x) \rightarrow +\infty$

$$\frac{U_{cm}}{E_m} \rightarrow 0$$

1pt particulier: $x=1 \quad \omega = \omega_0 \quad f(x=1) = \frac{1}{Q^2} =$

$$\Rightarrow \frac{U_{cm}}{E_m} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} = Q$$

Rq: $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \quad X = x^2$

$$f(X) = (1-X)^2 + \frac{X}{Q^2}$$

$$f'(X) = -2(1-X) + \frac{1}{Q^2}$$

$$f'(X) = 0 \text{ pour } 2(1-X) = \frac{1}{Q^2} \Rightarrow X = 1 - \frac{1}{2Q^2} \quad x_n = x_n^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

x existe si $1 - \frac{1}{2Q^2} \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow x_n = \frac{\omega_n}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \text{ pour } Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \omega_n < 1$$

$$f(x_n) = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \right]^2 + \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \times \frac{1}{Q^2}$$

$$= \frac{1}{4Q^2} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^2}$$

$$= \frac{1 + 4Q^2 - 2}{4Q^2}$$

$$f(x_n) = \frac{4Q^2 - 1}{4Q^4} \text{ et } \frac{U_{mn}}{E_m} = \frac{1}{f(x_n)} = \sqrt{\frac{4Q^4}{4Q^2 - 1}} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} > Q$$

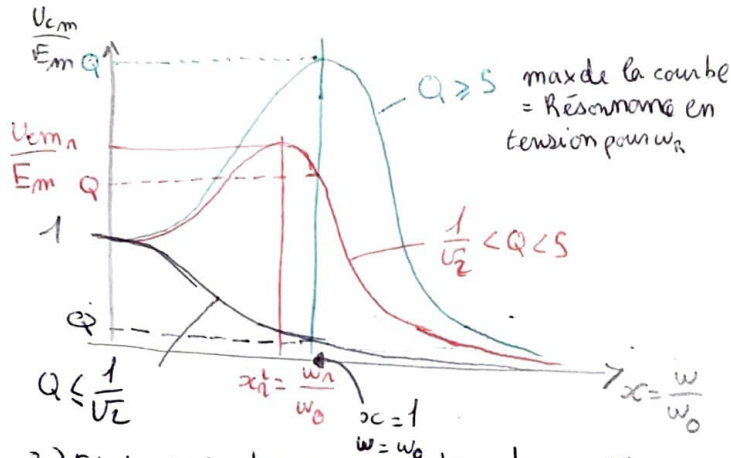
cas particulier: $Q \rightarrow +\infty$

$$\textcircled{4} \quad x_n = \frac{\omega_n}{\omega_0} \approx 1 \Rightarrow \omega_n \approx \omega_0$$

$$\text{pour } Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(5) \frac{U_{cm}}{E_m} \approx \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2}} \approx Q \quad \text{en pratique } Q \geq 5 \text{ suffit pr ces approximat}^0$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad x_L = 0 \quad \text{extremum en } x_L = 0 \Leftrightarrow \omega_L = 0$$



3) Etude de la phase en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$(3) \Rightarrow \underline{U_{cm}} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} = \frac{E_m}{D_{em}}$$

$$\varphi_{uc} = \arg(\underline{U_{cm}}) = \arg\left(\frac{E_m}{D_{em}}\right) = \arg(E_m) - \arg(D_{em})$$

$$\varphi_{uc} = -\varphi_{dem} \quad \text{si } \varphi_{dem} = \arg(D_{em})$$

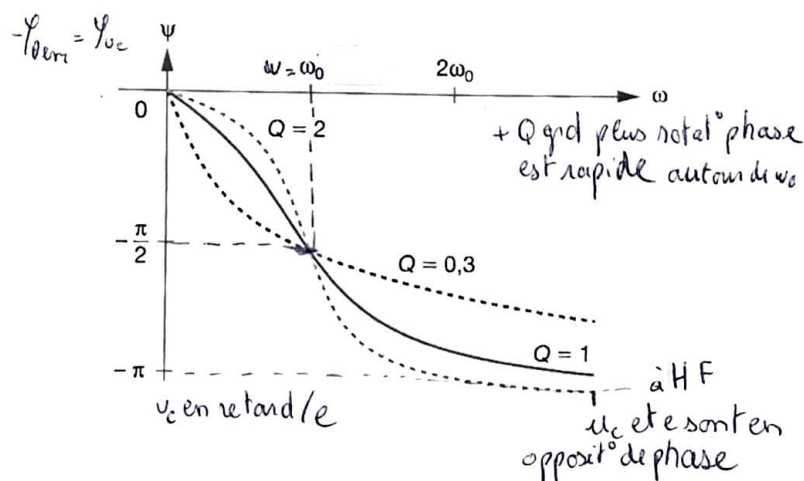
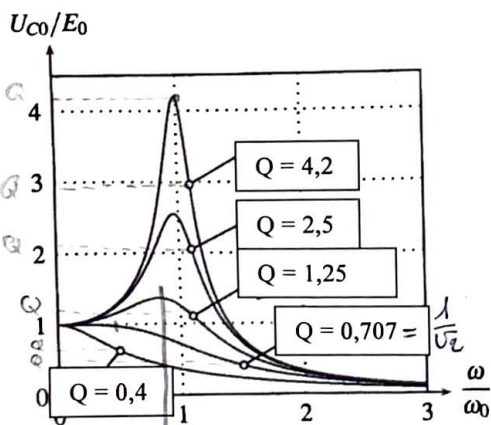
$$\cos(\varphi_{dem}) = \frac{1 - x^2}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}} = \frac{\operatorname{Re}(D_{em})}{|D_{em}|} = \frac{1 - x^2}{|D_{em}|}$$

$$\sin(\varphi_{dem}) = \frac{x}{Q \sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \quad \left(\frac{\operatorname{Im}(D_{em})}{|D_{em}|} = \frac{x}{Q} \right)$$

$$\text{BF: } \frac{w \rightarrow \infty}{w \rightarrow 0} \quad x \rightarrow \infty \quad \cos \varphi_{dem} > 0 \quad \text{on garde signe cos pr avoir un intervalle et tangente pr direction}$$

$$\varphi_{dem} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{tan } \varphi_{dem} \rightarrow 0 \quad \varphi_{dem} \rightarrow 0 \quad \varphi_{dem} \rightarrow 0 \quad \text{Logique au cos}$$

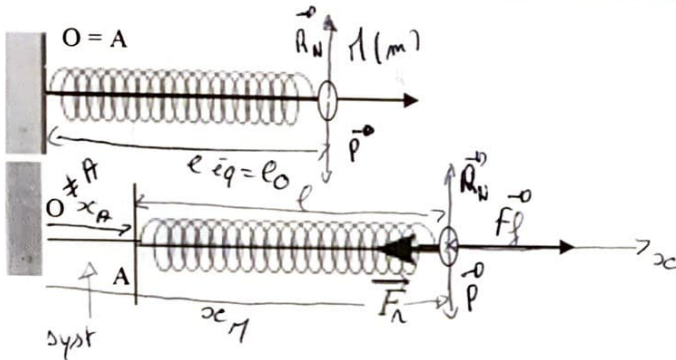
Figure 10.19 - Étude de la résonance aux bornes du condensateur



V L'oscillateur harmonique amorti

1) Equation du mouvement

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php



bicelle-manivelle $x_A(t) = A \cos(\omega t)$

Syst $\{1(m)\}$

Ref: Terrestre, galiléen

Forces: $\vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{R}_N$ support en l'abs de frottement solide

$\vec{F}_N = -k(l-l_0)\vec{e}_x$ avec $\vec{e}_x$ sens opposé à l'élongation du ressort

$\vec{F}_f = -d\vec{v}$ ($d > 0$) (frottement fluide) (vitesse opposée à x)

! $l = x_N - x_P \Rightarrow \vec{F}_N = -k(x_N - x_P - l_0)\vec{e}_x$

Deuxième loi de Newton: $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

$\vec{O}P = x_N\vec{e}_x$ $\vec{O}A = x_P\vec{e}_x$ $\vec{a}_N = \ddot{x}_N\vec{e}_x$ $\vec{a}_P = \ddot{x}_P\vec{e}_x$

pt fixe $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_f + \vec{F}_N$

On projette sur (Ox)

$$m\ddot{x}_N = -k[(x_N - x_P) - l_0] - d\dot{x}_N$$

$$m\ddot{x}_N + d\dot{x}_N + k(x_N - l_0) = x_P k$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_N + \frac{d}{m}\dot{x}_N + \frac{k}{m}(x_N - l_0) = \frac{k}{m}x_P$$

On pose: $x_N = x_A - l_0$ $\dot{x}_N = \dot{x}_A$ $\ddot{x}_N = \ddot{x}_A$

$$\ddot{x}_A + \frac{d}{m}\dot{x}_A + \frac{k}{m}x_A = \frac{k}{m}x_P$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{d}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{d} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{x}_A + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_A + \omega_0^2 x_A = \omega_0^2 x_P$$

$$\text{ou } x_A(t) = A \cos(\omega t)$$

2) Réponse à une élongation

a) Notation complexe

$x_A(t) = x_{re}(t) + x_{im}(t)$ $x_{re}(t) \rightarrow 0$ au bout de 5τ
On ne s'intéresse qu'à $x_{im}(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$

① est linéaire donc on peut passer en complexe

$$\ddot{x}_A + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_A + \omega_0^2 x_A = \omega_0^2 x_P \quad (1')$$

$$\text{ou } \underline{x}_A = \underline{X} e^{j\omega t} \quad \underline{X} = X e^{j\varphi}$$

$$\underline{x}_P = A e^{j\omega t} \quad A \text{ est réelle}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2 \underline{x}_A + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{x}_A + \omega_0^2 \underline{x}_A = \omega_0^2 \underline{x}_P$$

$$\Rightarrow \underline{x}_A \left[-\omega^2 + \omega_0^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right] = \omega_0^2 \underline{x}_P$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{x}_A}{\underline{x}_P} = \frac{X}{A} = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

$$\Rightarrow \frac{X}{A} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}} \quad \boxed{u = \frac{\omega}{\omega_0}} \text{ pulsat° réduite}$$

$$\textcircled{2} \frac{X}{A} = \frac{1}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \quad \text{m'expression que } u_c \text{ pr RLC série}$$

b) étude fréquentielle.

$\Rightarrow$ m'étude

b) Courbes cf doc 8 p 12

3) Réponse en vitesse

a) Notation complexe

$$v = \dot{x}_A \quad \text{ou } \underline{v} = j\omega \underline{x}_A \quad \textcircled{3}$$

$$\underline{v} = \underline{V} e^{j\omega t} \quad \text{ou } \underline{V} = V e^{j\varphi}$$

On simplifie ③ par $e^{j\omega t}$:

$$\underline{V} = j\omega \underline{X} \quad \textcircled{3'}$$

$$\text{ou } \textcircled{2} \frac{X}{A} = \frac{1}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{A} = \frac{j\omega}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}}$$

$$u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\frac{V}{A} = \frac{j\omega_0 u}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}}$$

on divise par $j\omega_0$ ($\text{car } j^2 = -1$)

$$\frac{V}{A} = \frac{\omega_0}{\frac{1}{j\omega_0} + j\frac{u}{Q} + j\omega_0 u}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{A} = \frac{\omega_0 Q}{j\omega + j\omega Q + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{A} = \frac{\omega_0 Q}{1 + jQ(\omega - \frac{1}{\omega})}$$

b) étude de l'amplitude

$$\textcircled{4} \Rightarrow \frac{V}{A} = \left| \frac{V}{A} \right| = \frac{\omega_0 Q}{\sqrt{1 + Q^2(\omega - \frac{1}{\omega})^2}}$$

$$\frac{V}{A} = \frac{\omega_0 Q}{f(\omega)}$$

$$\text{BF: } \omega \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow \infty \quad \omega = 1$$

$$\text{donc } (\omega - \frac{1}{\omega})^2 \rightarrow \infty \quad f(\omega) \rightarrow \infty$$

$$\text{dc } \frac{V}{A} \rightarrow 0$$

$$\text{HF: } \omega \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \omega = 1$$

$$\text{donc } (\omega - \frac{1}{\omega})^2 \rightarrow \infty \quad f(\omega) \rightarrow \infty$$

$$\text{dc } \frac{V}{A} \rightarrow 0$$

Extremum de $f(\omega)$

$$f'(\omega) = 2Q^2(\omega - \frac{1}{\omega}) \times 2 \times (\omega + \frac{1}{\omega})$$

$$f'(\omega) = 2Q^2(1 - \frac{1}{\omega^2})(\omega + \frac{1}{\omega})$$

$$f'(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega - \frac{1}{\omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = 1$$

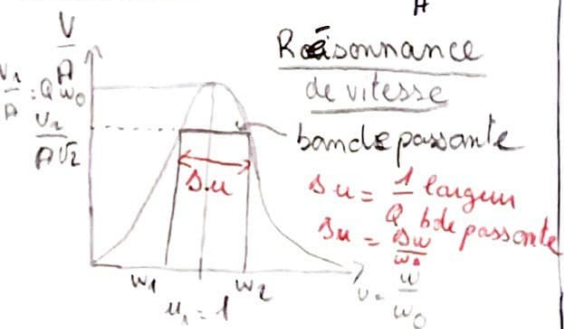
$$\Leftrightarrow \omega = 1 \quad \omega > 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1 \quad \text{penser à revenir à \omega et pas juste u}$$

$$\Leftrightarrow \omega_0 = \omega_0 \quad f(\omega_0) = 1$$

$$\frac{V_n}{A} = \omega_0 Q \quad \text{Amplitude de la vitesse à la résonance}$$

$$\text{1 pt particuliers: } \omega = 1 \quad \frac{V}{A} = \omega_0 Q$$



c) étude de la phase φ_v

$$\underline{Den} = 1 + jQ(\omega - \frac{1}{\omega})$$

$$\textcircled{4} \varphi_v = \arg(\underline{V}) = \arg(A\omega_0 Q) - \arg(\underline{Den})$$

$$\varphi_v = -\varphi_{Den} \quad \text{ou } \varphi_{Den} = \arg(\underline{Den})$$

$$\cos \varphi_{Den} = \frac{1}{|\underline{Den}|} > 0 \quad \varphi_{Den} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\sin \varphi_{Den} = \frac{Q(\omega - \frac{1}{\omega})}{|\underline{Den}|}$$

$$\tan \varphi_{Den} = \frac{\sin \varphi_{Den}}{\cos \varphi_{Den}} = Q(\omega - \frac{1}{\omega})$$

$$\text{BF: } \omega \rightarrow 0 \quad \frac{1}{\omega} \rightarrow \infty \quad \omega - \frac{1}{\omega} \rightarrow -\infty$$

$$\tan \varphi_{Den} \rightarrow -\infty \quad \varphi_{Den} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{HF: } \omega \rightarrow \infty \quad \frac{1}{\omega} \rightarrow 0 \quad \omega - \frac{1}{\omega} \rightarrow \infty$$

$$\tan \varphi_{Den} \rightarrow \infty \quad \varphi_{Den} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\text{pt pt: } \omega = 1$$

$$\tan \varphi_{Den} = 0 \quad \varphi_{Den} = 0$$



c) Bande passante $[\omega_1, \omega_2]$

$$\text{eq } \frac{V}{A} \geq \frac{V_n}{A} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\textcircled{4} \frac{V}{A} = \frac{Q\omega_0}{\sqrt{1 + Q^2(\omega - \frac{1}{\omega})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} Q\omega_0$$

$$\Rightarrow 1 + Q^2(\omega - \frac{1}{\omega})^2 = 2$$

$$\Rightarrow Q^2(\omega - \frac{1}{\omega})^2 = 1$$

$$\Rightarrow \omega - \frac{1}{\omega} = \pm \frac{1}{Q}$$

$$\Rightarrow \omega^2 \pm \frac{\omega}{Q} - 1 = 0 \quad \Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 \quad \text{tq } \omega > 0$$

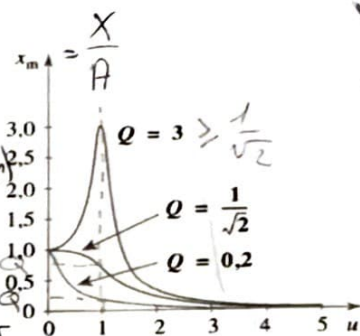
$$\omega = \frac{-\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} \quad \omega_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

$$\Delta \omega = \frac{1}{Q} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

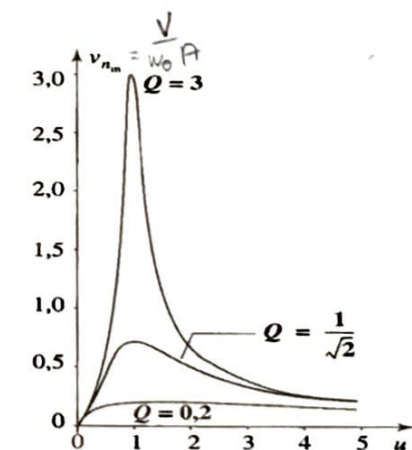
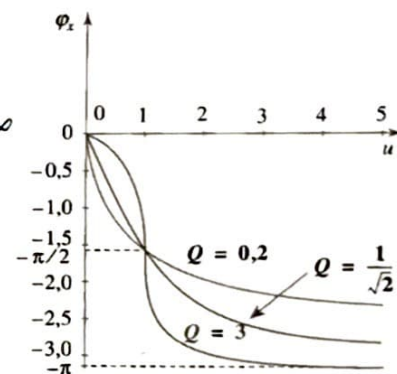
$Q \uparrow \Delta \omega \searrow$ limite de la bde passante = pulsations de coupure

$$\tan \varphi_{Den} = Q(\omega - \frac{1}{\omega}) = \pm 1 \quad \text{pour } \omega_1, \omega_2$$

$$\Rightarrow \varphi_{Den} = \pm \frac{\pi}{4}$$



Doc. 8. Variation de l'amplitude normalisée $x_{nm} = \frac{x_m}{x_{Am}}$ de la réponse en élongation en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation normalisée de l'excitation pour différents amortissements.



Doc. 12. Variation de l'amplitude : $v_{nm} = \frac{v_m}{\omega_0 x_{Am}}$ de la réponse en vitesse en fonction de la pulsation normalisée $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ de l'excitation

