PROGRAMMES 9 et 10.

PROGRAMME 9 : du 01/12 au 05/12

Reprise des EDL_1

EDL_2 à coefficients constants

Soit $(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$ où a, b, c réels ou complexes ($a \neq 0$) et $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

★ Équation homogène associée.

★ Forme des solutions, si l'ensemble des solutions de (E) n'est pas vide : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

★ Résolution de l'équation homogène. Si a, b, c sont réels, description des solutions réelles.

★ Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme : polynôme, $x \mapsto \lambda e^{\omega x}$ avec $(\lambda, \omega) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto \lambda \cos(\omega x)$ et $x \mapsto \lambda \sin(\omega x)$ avec $(\lambda, \omega) \in \mathbb{R}^2$ (méthode par passage aux complexes).

★ Principe de superposition.

★ Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

★ En TD, exemples de résolution par changement de fonction inconnue (donner la fonction, on se ramène à de l'ordre 1 ou de l'ordre 2 à coefficients constants).

Nombres réels

★ La relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum.

★ Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Propriété de la borne sup.

★ Partie entière. Notation $\lfloor x \rfloor$.

★ Approximations décimales : valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.

★ Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous a et b dans X, on a $[a, b] \subset X$.

Remarque aux colleurs : Ne pas donner d'exercice sur la notion de borne sup/inf.

Notions d'arithmétique

★ Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

★ Définition d'un nombre premier. Tout entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier supérieur ou égal à 2 en produit de facteurs premiers.

★ PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul. PPCM de deux entiers naturels non nuls. Calcul du PGCD et PPCM en utilisant la décomposition en produit de nombres premiers. Algorithme d'Euclide.

Remarque aux colleurs : Les exercices sur l'arithmétique doivent être très simples (en particulier, pas de congruences, pas de théorème de Bézout, pas de théorème de Gauss, pas d'entiers premiers entre eux).

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Théorème donnant l'ensemble des solutions d'une EDL_1 sans second membre.
- ❒ Solutions dans le cas réel de $ay''+by'+cy=0$ (où a,b,c constantes réelles, $a\neq 0$).
- ❒ Sous quelle forme recherche-t-on une solution particulière de $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=P(x)$ où P est un polynôme et a,b,c constantes de K, $a\neq 0$.
- ❒ Sous quelle forme recherche-t-on une solution particulière de $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=\lambda e^{\omega x}$ où a,b,c,ω constantes de K, $a\neq 0$.
- ❒ Problème de Cauchy pour un ordre 1 ou 2.
- ❒ Définition d'un majorant, d'un maximum (si existence).
- ❒ Définition d'un minorant, d'un minimum (si existence).
- ❒ Définition d'une borne supérieure, d'une borne inférieure (si existence).
- ❒ Définition de la partie entière.
- ❒ Définition des approximations décimales.
- ❒ Définition d'un nombre premier.
- ❒ Théorème de décomposition d'un entier.
- ❒ Définition du pgcd ou du ppcm de deux entiers naturels a et b non nuls. Calcul à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de a et b.
- ❒ Algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd (à expliquer).

Démonstrations

- ❒ *Exo fait en cours* : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''+y'+y=\cos^2(x)$.
- ❒ *Un exercice du TD* : Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}, 0\leq \lfloor nx\rfloor - n\lfloor x\rfloor \leq n-1$.
- ❒ L'ensemble des nombres premiers est infini.

PROGRAMME 10 : du 08/12 au 12/12

Reprise des EDL, des réels et de l'arithmétique

Suites réelles : le tout début

★ Modes de définition d'une suite. De façon explicite ou par récurrence.

★ Monotonie. Suite minorée, majorée, bornée. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée.

★ Suites stationnaires. Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques.

★ Suites récurrentes linéaires d'ordre deux (la démonstration sera faite dans le cours d'algèbre linéaire).

★ Limite d'une suite réelle : limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Suite convergente, suite divergente. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Toute suite réelle convergente est bornée.

★ Opérations sur les limites : combinaisons linéaires, produit, quotient. Limite de $(f(u_n))$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Limites classiques (qui viennent des croissances comparées, des taux d'accroissement en 0 des fonctions usuelles). Limite de (q^n). Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Une question de savoir-faire

En plus de la preuve et de l'énoncé, un exercice rapide sur une suite arithmético-géométrique ou une suite récurrente linéaire d'ordre 2 sera demandé.

Un énoncé au choix à demander

❒ Théorème donnant l'ensemble des solutions d'une EDL_1 sans second membre.

❒ Solutions dans le cas réel de $ay''+by'+cy=0$ (où a, b, c constantes réelles, $a \neq 0$).

❒ Sous quelle forme recherche-t-on une solution particulière de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)$ où P est un polynôme et a, b, c constantes de K, $a \neq 0$.

❒ Sous quelle forme recherche-t-on une solution particulière de $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = \lambda e^{\omega x}$ où a, b, c, ω constantes de K, $a \neq 0$.

❒ Problème de Cauchy pour un ordre 1 ou 2.

❒ Définition d'un majorant, d'un maximum (si existence).

❒ Définition d'un minorant, d'un minimum (si existence).

❒ Définition d'une borne supérieure, d'une borne inférieure (si existence).

❒ Définition de la partie entière.

❒ Définition des approximations décimales.

❒ Définition d'un nombre premier.

❒ Théorème de décomposition d'un entier.

❒ Définition du pgcd ou du ppcm de deux entiers naturels a et b non nuls. Calcul à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de a et b.

❒ Algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd (à expliquer).

❒ Définition mathématique d'une limite finie ou infinie.

❒ Limites classiques (limites de taux d'accroissement) appliquées aux suites convergeant vers 0.

Démonstrations

- ❒ L'ensemble des nombres premiers est infini.
- ❒ *Un exercice du TD* : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n - 1$.
- ❒ Unicité de la limite finie (si existence).