Signaux Electriques SE7 Filtrage linéaire d'un signal périodique

I Filtrage d'un signal non sinusoïdal

1.) Théorème de Fourier (découvert par le mathématicien et physicien Joseph Fourier début XIX)

Tout signal périodique de pulsation ω_s et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de pulsations multiples de ω_s.

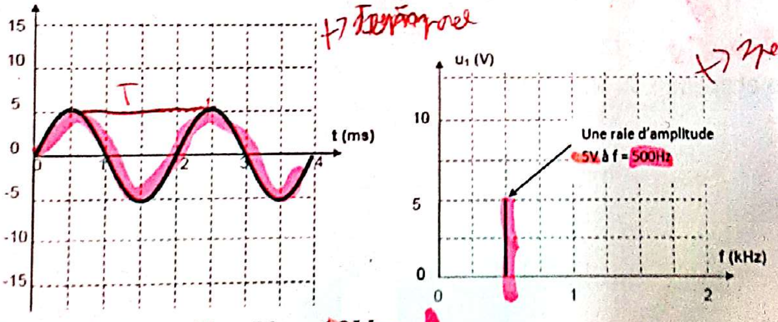
$$\boxed{s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \text{ où } \omega_n = n.\omega_s \text{ et } \omega_s = 2\pi f_s}$$

Les A_n sont des amplitudes (constantes positives). Les φ_n sont les avances de phase (constantes).

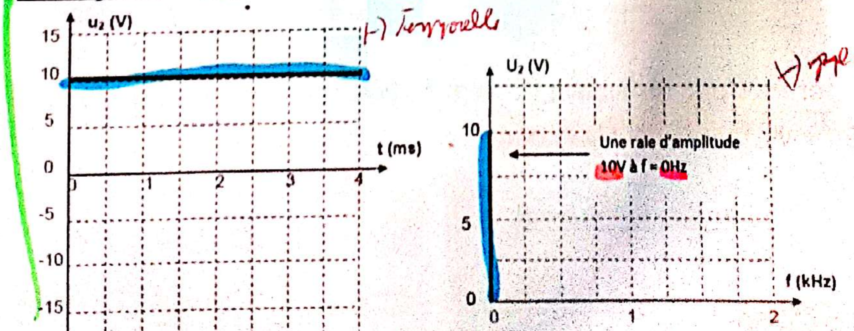
A_0 est la composante continue du signal, ou valeur moyenne ou offset.
A_1 est l'amplitude du signal fondamental de fréquence f_s.
Les A_n sont les amplitudes des harmoniques de fréquence $f_n = n.f_s$ de rang $n \geq 2$.

Analyse spectrale : Opération qui consiste à déterminer la décomposition en signaux sinusoïdaux d'un signa donné.

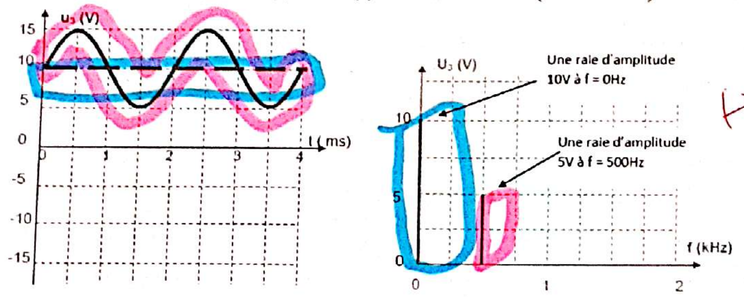
Exemple 1 : $u1(t) = 5.\sin(2\pi.500.t)$ ne contient qu'une seule fréquence : f = 500 Hz T = 2 ms



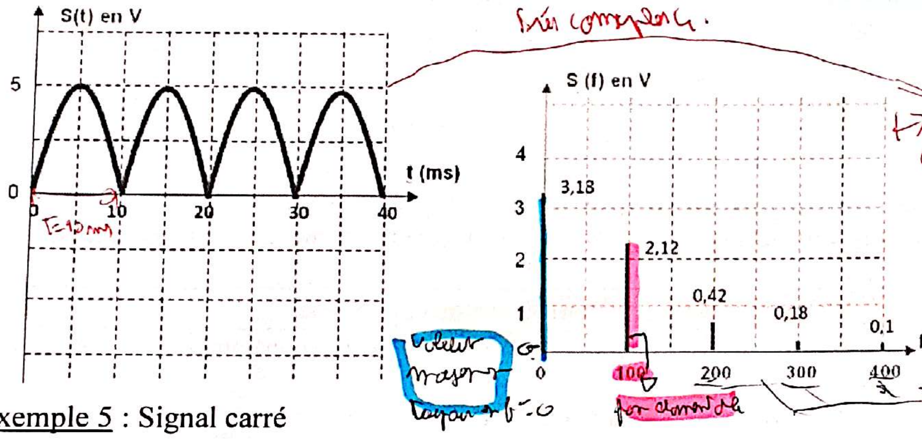
Exemple 2 : $u_2(t) = U_2 = 10V$



Exemple 3 : $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t) = 10 + 5.\sin(2\pi .500.t)$



Exemple 4 : Signal sinusoïdal redressé « double alternance »



Exemple 5 : Signal carré

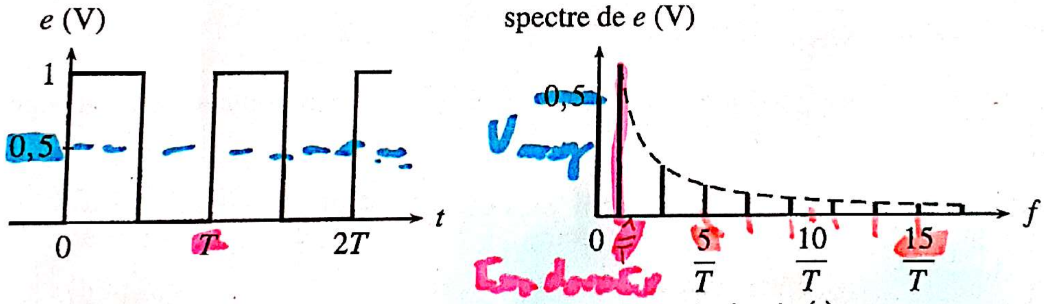


Figure 12.14 – Forme d'onde et spectre du signal $e(t)$.

On a $f_n = nf_0$ que quand n est impaire

harmonique à n pairs ont des $A_n = 0$.

Remarque : Conservation de la puissance

Pour une tension périodique u(t) mesurée aux bornes d'une résistance R, on a la décomposition en série de Fourier : $u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff}\sqrt{2}\cos(\omega_n t + \varphi_n)$ où $U_n = U_{n,eff}\sqrt{2}$

On admet que : $U_{eff}^2 = U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff}^2$ Formule de Parseval → HP

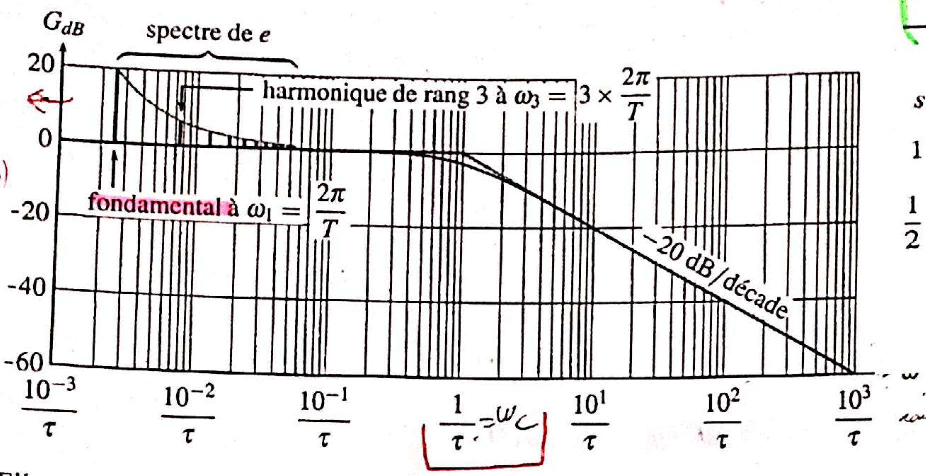
donc $\frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{n,eff}^2}{R}$ donc $P_R = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$

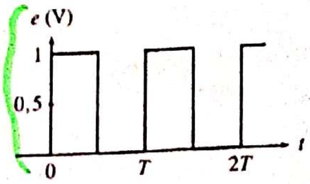
La puissance moyenne absorbée par la résistance R, due à la tension u(t), est la somme des puissances dues à chacune des composantes de Fourier de la tension u(t) (sa valeur moyenne, son fondamental et toutes ses harmoniques).

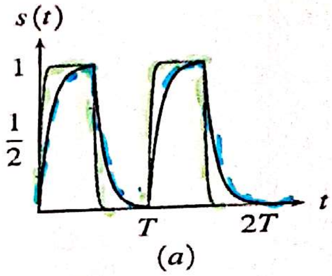
2.) Filtre passe-bas du premier ordre

circuit série RC sortie sur C.

Figure 12.15-Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où $\omega_s \ll \omega_c$







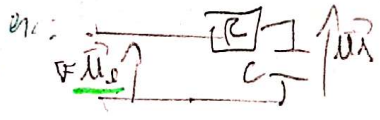
coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

Filtrage passe-bas d'un signal créneaux

(a) $\omega_s = 0{,}12\ \omega_c$ ($T_s = 50\tau$) en gris et $\omega_s = 0{,}6\ \omega_c$ ($T_s = 10\tau$) en noir

Passe-bas 1er ordre : $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$, où $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ la pulsation de coupure.

donc $\underline{H} = \frac{1}{1 + \tau j\omega} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \tau p}$; p de Laplace tel que $p = j\omega$.



1er cas : $\omega_s \ll \omega_c$, ω_c pulsation de coupure et $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$, T_s la période

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_s} \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{T_s}{2\pi} \gg \tau \Rightarrow T_s \gg 2\pi\tau$

le spectre de $e(t)$ est situé dans la bande passante du filtre $\Rightarrow s(t) = e(t)$

cependant car $G \simeq 0 \Rightarrow \underline{H} = \frac{S_m}{E_m} \simeq 1$

il manque cependant qq harmoniques à HF $\Rightarrow$ arrondissement du signal carré.

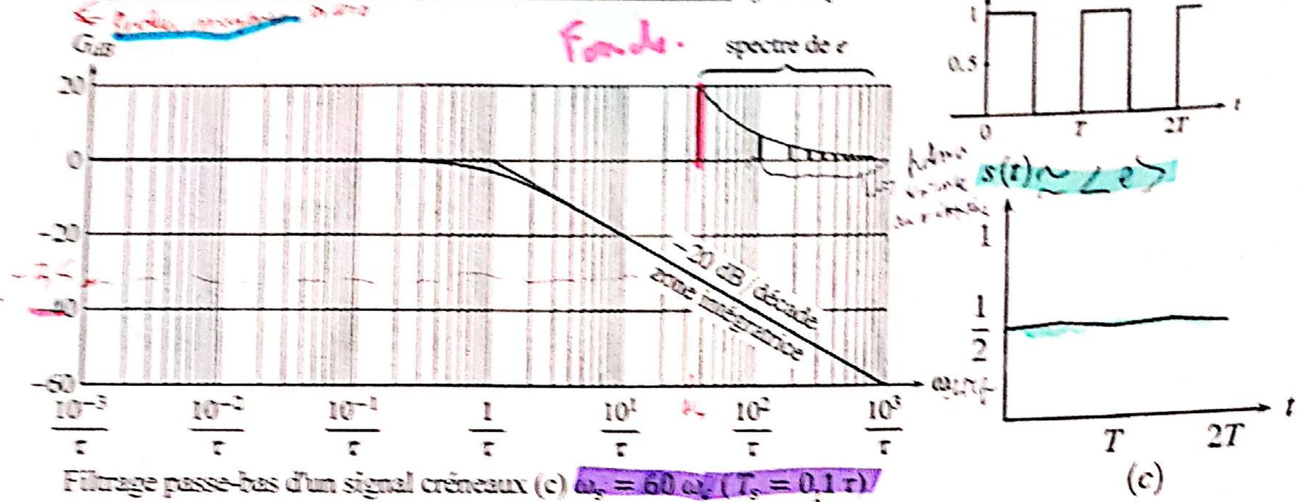
2ème ~~cas : $\omega \gg \omega_c$~~ , on lit graphiquement $G < 0$ et $H < 1$, donc $S_m < E_m$.

A.N : Pour $T_s = 10\tau$: $\omega_s = \frac{2\pi}{10\tau} = \frac{\pi}{5}\omega_c \Rightarrow \omega_s \simeq 0{,}6\,\omega_c \Rightarrow$ courbe N.

$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}}$; fondamental en $\omega = \omega_s \Rightarrow |\underline{H}| = \frac{S_m}{E_m} = \cancel{\ldots} \simeq 0{,}86$ graphiquement

donc $G = 20 \log(|\underline{H}|) = -1{,}3$ dB.

Figure 12.16-Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où $\omega_s \gg \omega_c$



Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (c) $\omega_s = 60\,\omega_c$ ($T_s = 0.1\,\tau$)

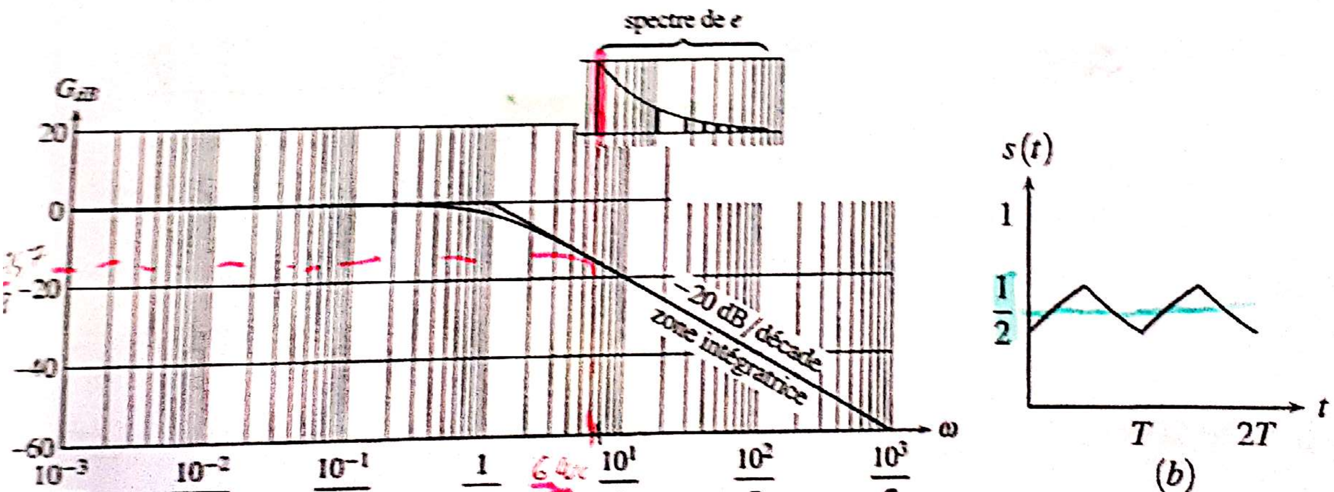
ici on a $\omega_s = 60\,\omega_c$; $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ et $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_s} = 60\frac{1}{\tau} \Rightarrow T_s \approx 0,1\,\tau$

$\Rightarrow |H|_f = \frac{1}{\sqrt{1+(60)^2}}$ → Pour le fonda $|H|_f = \frac{S_m}{E_m} \approx 1/62$ donc $G = -35\,dB$

⇒ le fondamental et les harmoniques ont été atténués ⇒ seul la V.M passe.

On a un MOYENNEUR (comportement ; ... THF)



Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (b) $\omega_s = 6\,\omega_c$ ($T_s = \tau$).

2ème cas : $\omega_s = 6\,\omega_c$ ⇒ $\frac{2\pi}{T_s} = 6\frac{1}{\tau}$ ⇒ $\frac{T_s}{2\pi} = \frac{\tau}{6}$ ⇒ $T_s \approx \tau\frac{2\pi}{6} = 1,05\,\tau$

$|H|_f = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{6}{1})^2}} \approx 0,16 \Rightarrow G = -15,7\,dB$

⇒ La V.M passe, le fonda est peu atténué, les harmo beaucoup plus atténués

⇒ On remarque que la courbe (+) est l'intégrale du signal créneau + V.M

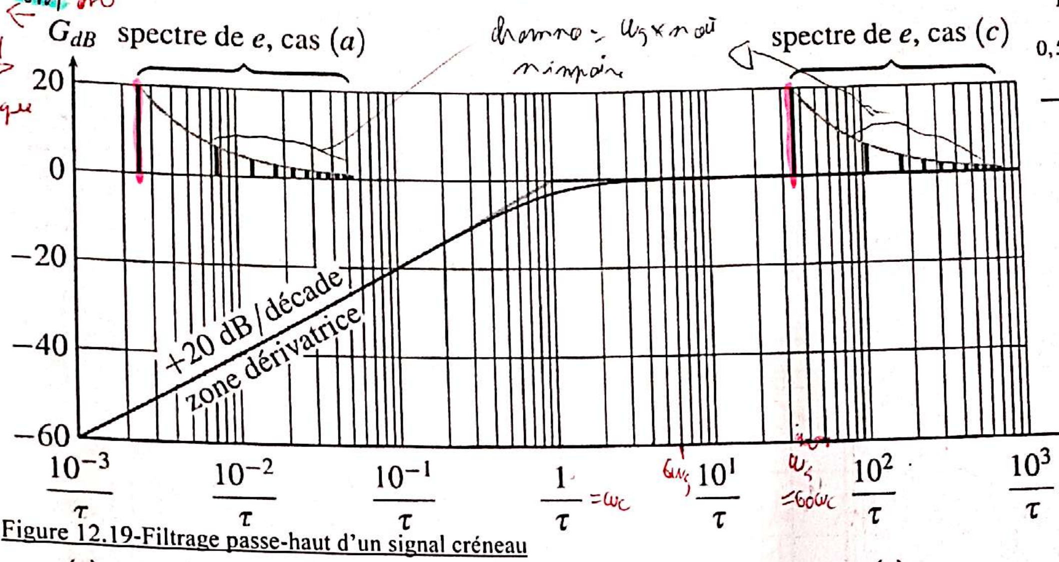
On a un INTEGRATEUR (comportement)

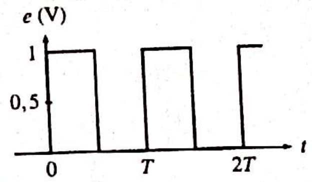
ccl : le passe-bas déforme peu le signal en BF, en MF l'amortit, l'intègre en HF et moyenne en THF

3.) Filtre passe-haut du premier ordre

(ex : RC série sortie sur R)

Figure 12.18-Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-haut



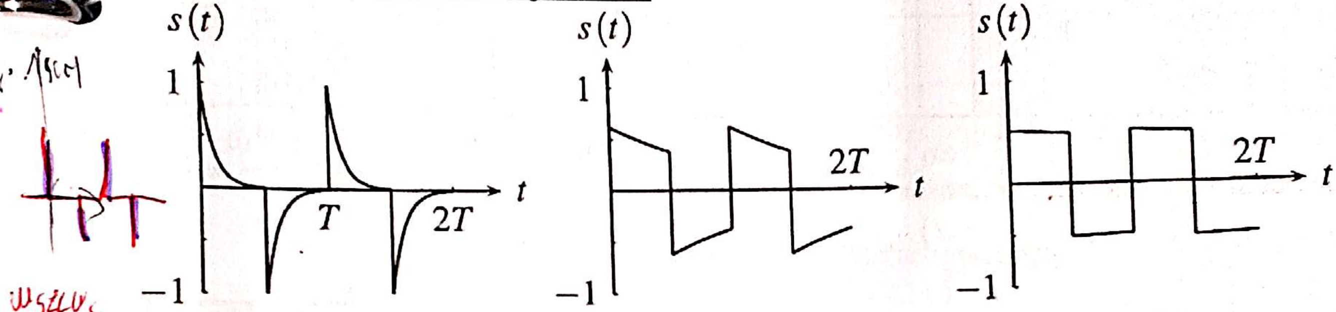


On remarque que V.M est toujours coupé

Rappel : donc, $\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}$, où $x = \frac{\omega}{\omega_c}$

et $\omega_c = \frac{1}{RC}$

Figure 12.19-Filtrage passe-haut d'un signal créneau



(a) $\omega_s = 0{,}6\,\omega_c$ ($T_s = 10\,\tau$)

(b) $\omega_s = 6\,\omega_c$ ($T_s = \tau$)

(c) $\omega_s = 60\,\omega_c$ ($T_s = 0{,}1\,\tau$)

$\omega_s \ll \omega_c$ ⟹ $\frac{ds(t)}{dt}$ → dérivation "apparente" du signal d'entrée

intermédiaire

On déplace le spectre de gauche à droite

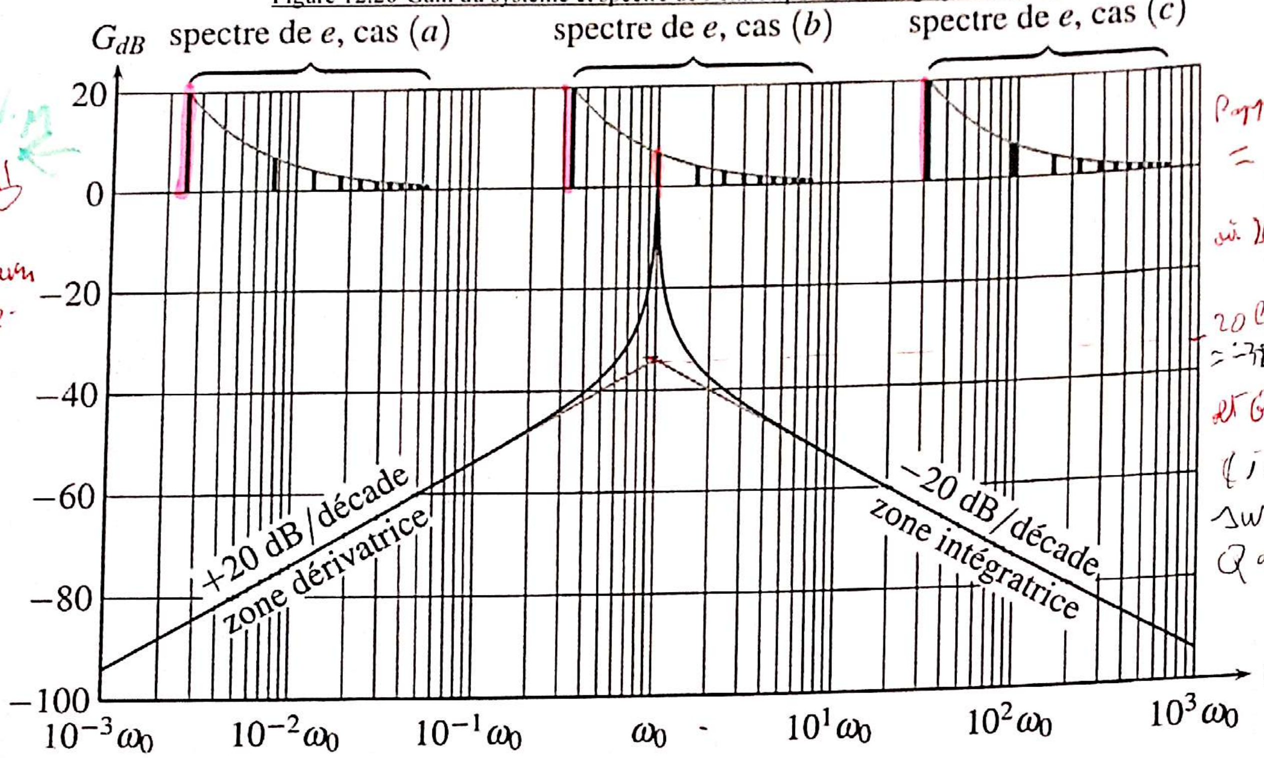
$\omega_s \gg \omega_c$

Cl : on voit graphiquement que tout le spectre est dans la BP du filtre ; On récupère le signal carré, "sans" la V.M

(ex : RLC série sortie sur R)

4.) Filtre passe-bande

Figure 12.20-Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-bande



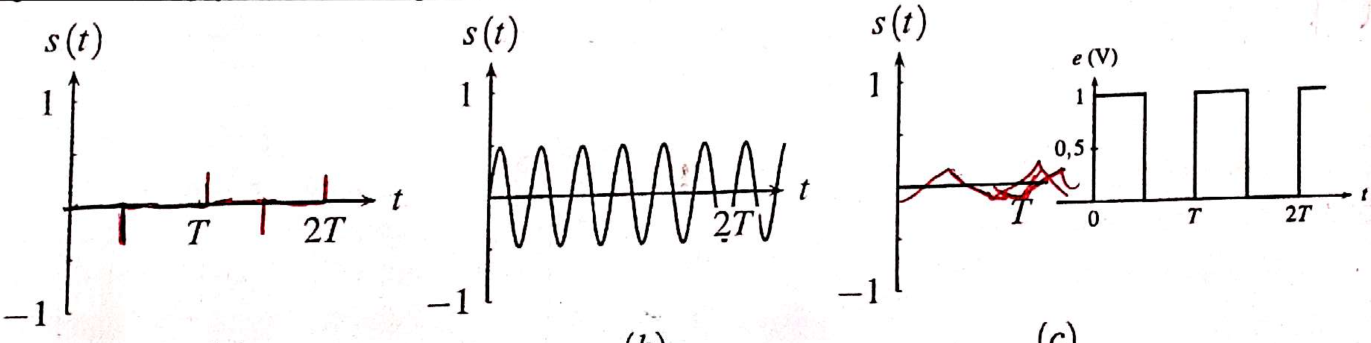
nω toujours coupée.

Rappel : $\underline{H} = \dfrac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ où $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$; $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$20\log(Q) = 32\,dB$ donc $Q \simeq 40$ et Q : $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$

(ici, on constate $\Delta\omega$ petite, donc Q grand)

Figure 12.21-Filtrage passe-bande d'un signal créneau



(a)	(b)	(c)
$\omega_s \ll \omega_0$	$3\omega_s = \omega_0$	$\omega_s \gg \omega_0$
atténuation et dérivation.	Seul l'harmonique $n=3$ passe, le reste du spectre est coupé.	atténuation et intégration

$\omega_3 = 3\omega_s$

donc $T_3 = \dfrac{2\pi}{\omega_3} = \dfrac{2\pi}{3\omega_s}$

donc $T_3 \simeq \dfrac{2}{\omega_s}$

(convi : $T_3 = T_s/3$)

II Utilisation des filtres

1.) Choix d'un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

On est donc amené à définir un gabarit du filtre à construire. Un filtre **passe-bas** a pour fonction de laisser passer toutes les fréquences inférieures à f_p (indice p pour passante) et d'éliminer toutes les fréquences supérieures à f_a (indice a a pour atténuée). On définit alors :

- la dernière **fréquence passante** f_p (le filtre doit laisser passer les fréquences $f < f_p$),
- le **gain minimum** G_{sup}, en dB, pour les fréquences qui passent à travers le filtre (il ne doit pas être trop faible, car ces fréquences doivent sortir du filtre sans être atténuées),
- la première **fréquence atténuée** f_a (toutes les fréquences $f > f_a$ doivent être éliminées par le filtre),
- le **gain maximum** G_{inf} pour les fréquences atténuées. Le gain du filtre à ces fréquences doit être inférieur à G_{inf} pour être sûr qu'elles soient éliminées.

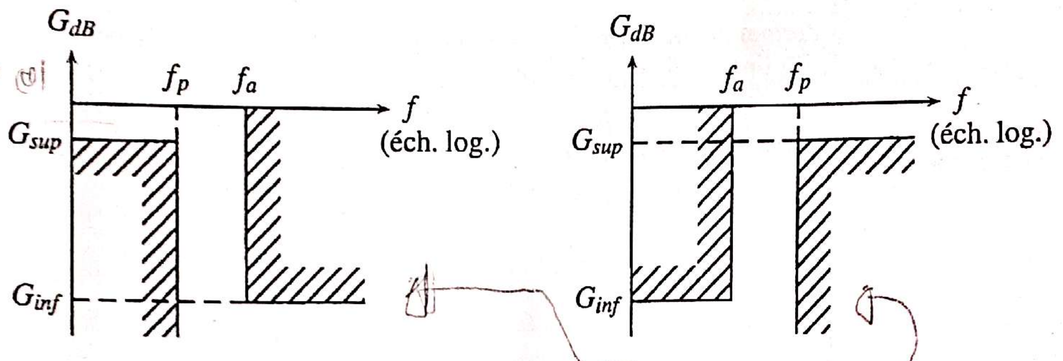


Figure 11.25 – Gabarit (a) d'un passe-bas (b) d'un passe-haut.

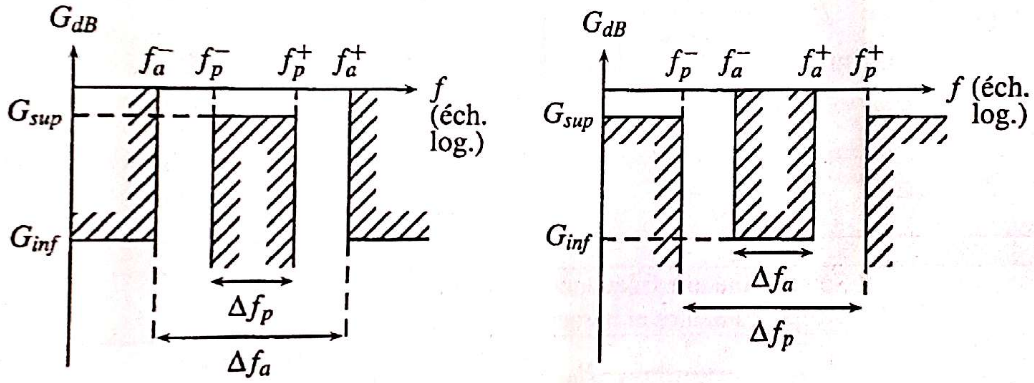


Figure 11.26 – Gabarit (c) d'un passe-bande (d) d'un coupe-bande.

2.) Catalogue de filtres.

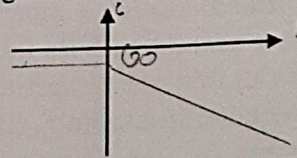
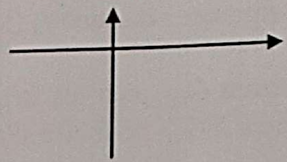
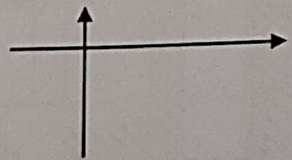
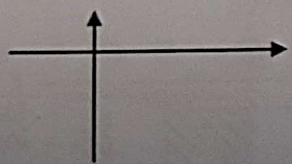
Si on a $\underline{H} = \underline{H_1} \times \underline{H_2}$ $\Rightarrow G = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log(|\underline{H_1}| \times |\underline{H_2}|)$

donc $\boxed{G = G_1 + G_2}$

de même, $\varphi = \arg(\underline{H_1} \times \underline{H_2}) = \boxed{\varphi_1 + \varphi_2}$

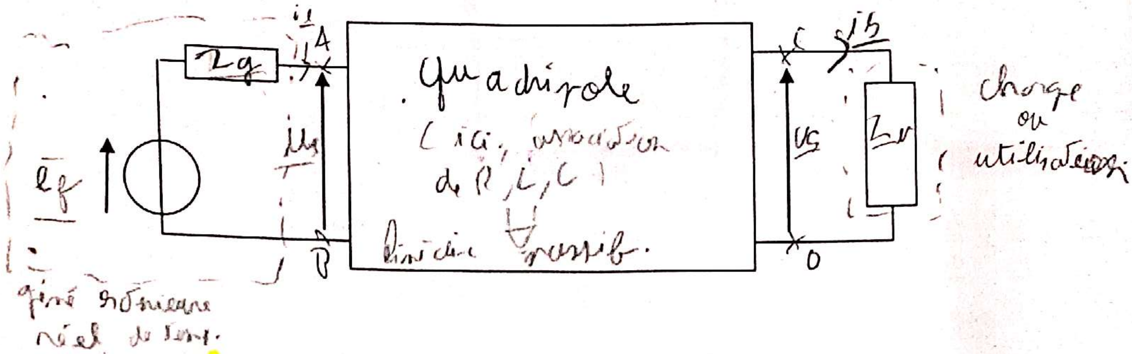
Rq : Si $\underline{H_1} = H_0$, $H_0 \in \mathbb{R}$, alors $G = G_2 + G_0$ où $G_0 = 20 \log(|H_0|)$

$\varphi = \arg(H_0 \times \underline{H_2}) = \varphi_2$

bas	Permet de recueillir l'information sur la forme générale du signal. Moyenneur.	
er ordre : érie sortie sur C érie sortie sur R (TD)	$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx} H_0$	Intégrateur à haute fréquence $H_0 < 1$ 
ordre : série sortie sur C	$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} H_0$	Double intégrateur à haute fréquence 
aut	Permet de recueillir l'information relative aux détails du signal. Elimine la valeur moyenne.	
ordre : rie sortie sur R rie sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \frac{jx}{1 + jx} H_0$	Dérivateur à basse fréquence 
ordre : érie sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} H_0$	Double dérivateur à basse fréquence 
	Sélectionne une fréquence particulière	

3.) Mise en cascades de deux filtres.

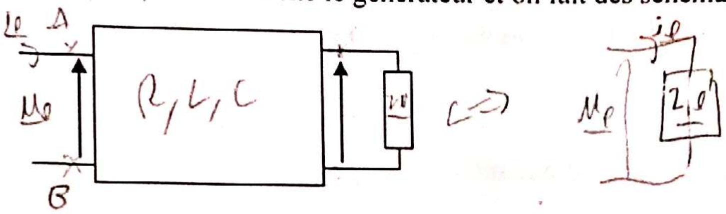
a) Impédances d'entrée et de sortie.



Impédance d'entrée : $\boxed{\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{u}_e}{\underline{i}_e}}$ En présence de $\underline{Z}_u$: impédance d'entrée en charge.

En l'absence de $\underline{Z}_u$: impédance d'entrée à vide.

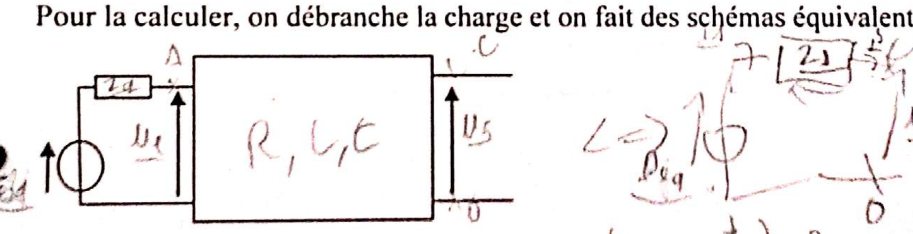
On a un dipôle linéaire passif vu de l'entrée (entre A et B) : il est modélisable depuis l'entrée par une impédance équivalente puisqu'il ne contient pas de générateur.
Pour la calculer, on débranche le générateur et on fait des schémas équivalents. avec les Z



Impédance de sortie

On a un dipôle linéaire actif vu de la sortie (entre C et D) : il est modélisable depuis la sortie par un générateur équivalent de Thévenin.

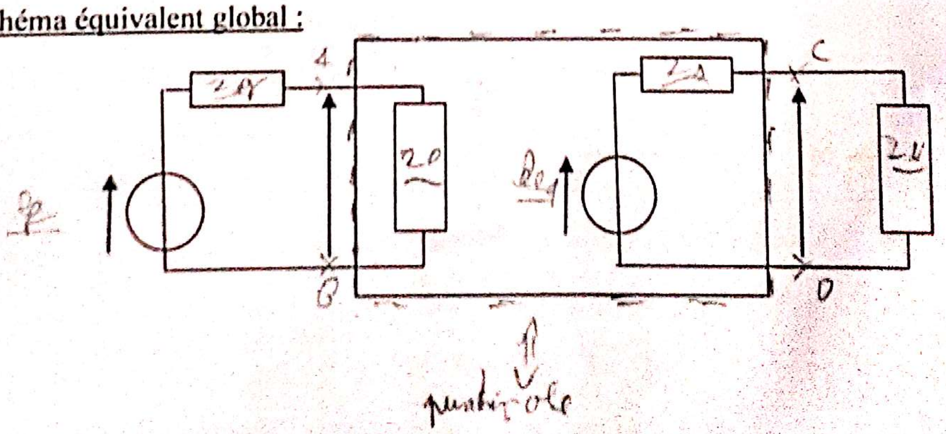
Pour la calculer, on débranche la charge et on fait des schémas équivalents. $\boxed{\underline{Z}_s = -\dfrac{\underline{u}_s}{\underline{i}_s}}$



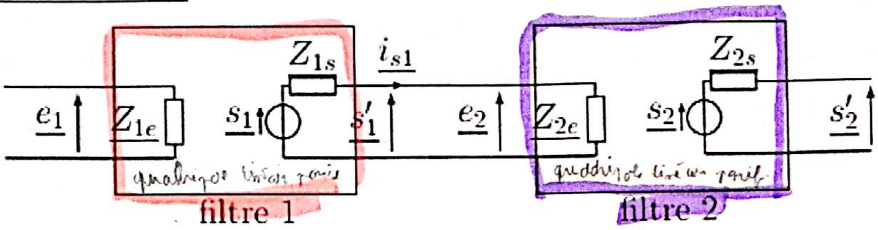
u_s : $V_s = e_{eq} - Z_s\, i_s$

→ on éteint la source (φ ⟶) $e_g = 0 \Rightarrow e_{eq} = 0$, donc $Z_s = -\dfrac{u_s}{i_s}$

Schéma équivalent global :



b) Mise en cascade.



On veut : $\underline{H} = \frac{s_2}{e_1} = \frac{s_2}{e_2} \times \frac{s_1}{e_1} = \underline{H_2} \times \underline{H_1}$ où $H_1 = \frac{s_1}{e_1}$; $H_2 = \frac{s_2}{e_2}$

On a donc $e_2 \simeq s_1$ si $Z_{2e} \gg Z_{1s}$

$H'_1 = \frac{s'_1}{e_1}$ fct de transfert en charge avec utilisation

$H_1 = \frac{s_1}{e_1}$ = fct de transfert à vide, pour $i_{s1} = 0$

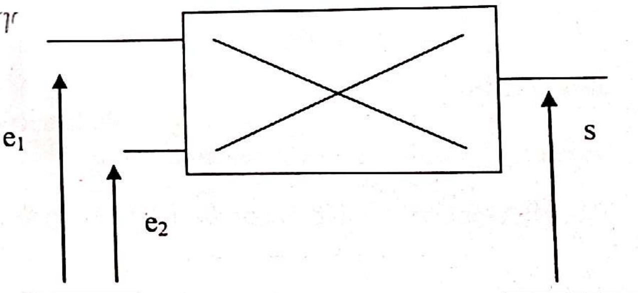
Or $i_{s1} = \frac{e_2}{Z_{2e}}$ ⇒ $i_{s1} \simeq 0$ si $Z_{2e} \gg 1$ ⇒ $H'_1 \simeq H_1$

Or on veut $s_1 = e_2$: on a PDT : $\frac{e_2}{s_1} = \frac{Z_{2e}}{Z_{1s} + Z_{2e}}$

Pour trouver ce résultat, il faut : $\underline{i_{s1}} = 0$, soit $\underline{Z_{2e}} \gg 1$ et $\underline{e_2} = \underline{s_1}$ soit $\underline{Z_{2e}} \gg \underline{Z_{1s}}$ C'est ce qu'on appelle l'adaptation d'impédance.

4.) Exemple de filtre non linéaire : le multiplieur

On aura en sortie : s(t)=k.e₁(t).e₂(t) où k est le gain du multiplieur (en V[-1]).



Si $e_1(t) = e_2(t) = E_0 \cos(\omega_e t)$,

alors $s(t) = kE_0^2 \cos^2(\omega_e t) = kE_0^2 \frac{1+\cos(2\omega_e t)}{2}$ fonct de $\cos^2(\ )$ non linéaire

donc $s(t) = \frac{kE_0^2}{2} + \frac{kE_0^2}{2}\cos(2\omega_e t)$

⚠ filtre non-linéaire (multiplieur) donc not° complexe inutilisable car impossible de $\mathrm{Re}(\ )$

Figure 10.18-Spectres des signaux d'entrée et de sortie du multiplieur