

Représentation complexe

$$j^2 = -1 \text{ et } j = \exp(j\pi/2)$$

$$\underline{z} = x + jy \quad |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \underline{z} = |\underline{z}| \cdot \left[ \frac{x}{|\underline{z}|} + j \frac{y}{|\underline{z}|} \right]$$

$$\underline{z} = |\underline{z}| e^{j\varphi} = |\underline{z}| [\cos\varphi + j\sin\varphi] \text{ donc } \cos\varphi = \frac{x}{|\underline{z}|} \quad \sin\varphi = \frac{y}{|\underline{z}|} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Hypothèses : Dipôle linéaire passif en convention récepteur

parcouru par  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$   $\underline{i}(t) = I_m \exp[j(\omega t + \varphi_i)] = \underline{I_m} \exp(j\omega t)$  où  $\underline{I_m} = I_m \exp(j\varphi_i)$   
à ses bornes  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$   $\underline{u}(t) = U_m \exp[j(\omega t + \varphi_u)] = \underline{U_m} \exp(j\omega t)$  où  $\underline{U_m} = U_m \exp(j\varphi_u)$

Impédance complexe du dipôle

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

Admittance complexe du dipôle

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}$$

Résistor :  $\underline{Z}_R = R$

Bobine idéale :  $\underline{Z}_L = jL\omega$

Condensateur parfait :  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

I Le circuit RLC série1) Etude de l'intensité

$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

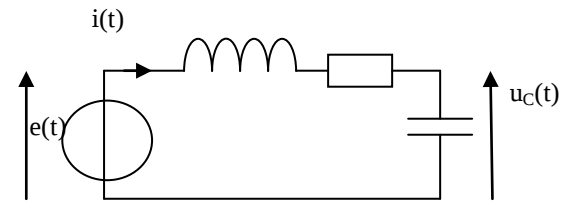
$$\underline{e} = E_m e^{j\omega t}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\underline{i} = I_m e^{j\omega t}$$

Equation de maille en complexe :

$$\frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{I_m}{E_m} = \frac{1}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$



puis on étudie le module et l'argument en fonction de  $\omega$ .

Equation différentielle :  $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$  à retrouver

$U_{R0}/U_{R0max}$

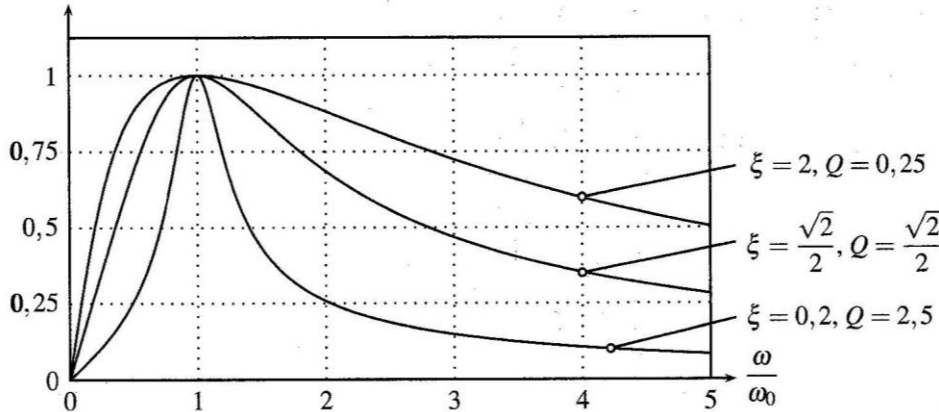
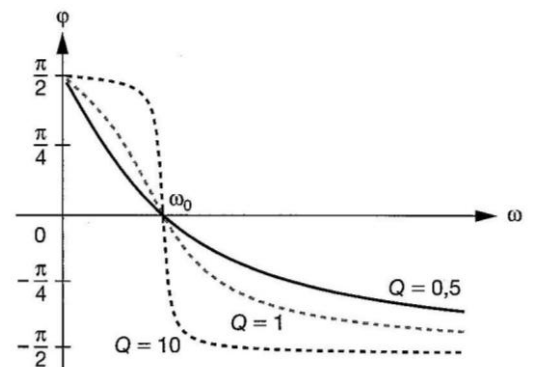
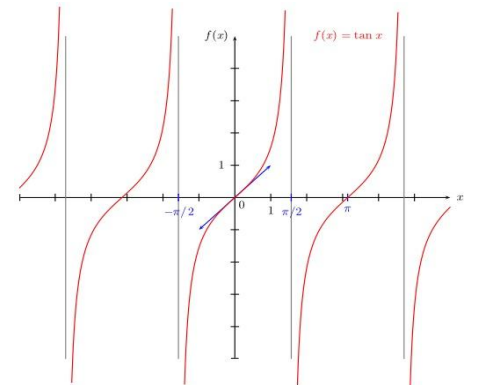


Figure 10.17 – Rapports de l'amplitude de  $u_R$  à sa valeur maximale ( $R$  variable).



Bande passante à -3dB : Intervalle de pulsation pour lequel  $I_m \geq \frac{I_{mr}}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

$$\varphi = \mp \frac{\pi}{4}$$

$I_{mr}$  : amplitude de l'intensité à la résonance.

## 2) Etude de la tension aux bornes du condensateur

$$e(t) = E_m \cos(\omega t) \quad \underline{e} = E_m e^{j\omega t}$$

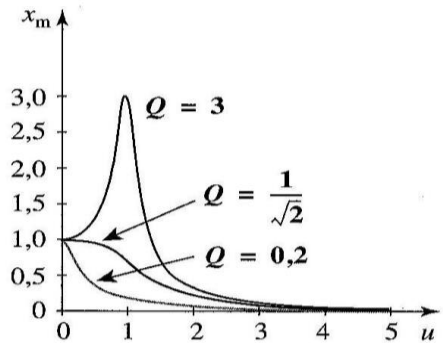
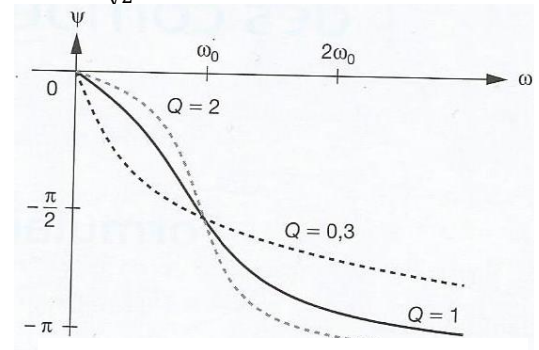
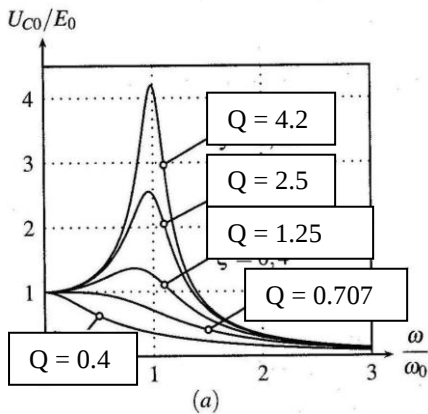
$$u_C(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \underline{u}_C = \underline{U}_{cm} e^{j\omega t}$$

Pont diviseur de tension :  $\frac{\underline{u}_C}{\underline{e}} = \frac{\underline{U}_{cm}}{E_m} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

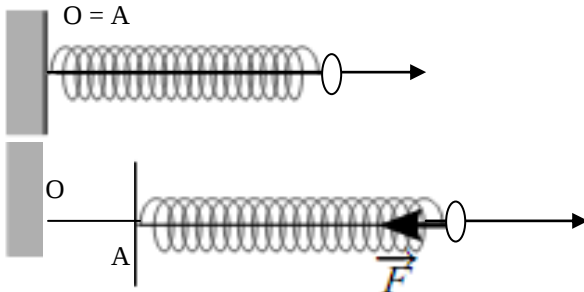
Retrouver  $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 e(t)$

$$\frac{\underline{U}_{cm}}{E_m} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } \omega_r \text{ est la pulsation de résonance pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Figure 10.19 – Étude de la résonance aux bornes du condensateur



## II L'oscillateur harmonique amorti



$$\ell = x_M - x_A \text{ et } x_1 = x_M - \ell_0$$

Force de frottement fluide :  $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$

Force de rappel du ressort :  $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx_1}{dt} + \frac{k}{m} x_1 = \frac{k}{m} x_A$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = \omega_0^2 x_A$$

$$x_A(t) = A \cos(\omega t) \text{ donc } \underline{x}_A = A e^{j\omega t}$$

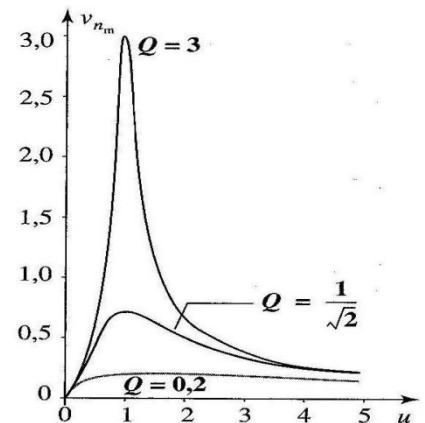
$$x_1(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ donc } \underline{x}_1 = \underline{X} e^{j\omega t} : \text{mêmes courbes que } u_C$$

$$\frac{\underline{X}}{A} = \frac{1}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} \quad \text{où } u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$v = \frac{dx_1}{dt} \quad \text{donc } \underline{V} = j\omega \underline{X} \quad \text{même courbe de phase que } i$$

$$\frac{\underline{V}}{A} = \frac{\omega_0 Q}{1 + jQ(u - \frac{1}{u})}$$

**Doc. 8.** Variation de l'amplitude normalisée  $x_{n_m} = \frac{x_m}{x_{A_m}}$  de la réponse en élongation en fonction de  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  pulsation normalisée de l'excitation pour différents amortissements.



**Doc. 12.** Variation de l'amplitude :  $v_{n_m} = \frac{v_m}{\omega_0 x_{A_m}}$  de la réponse en vitesse en fonction de la pulsation normalisée  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  de l'excitation, pour différents