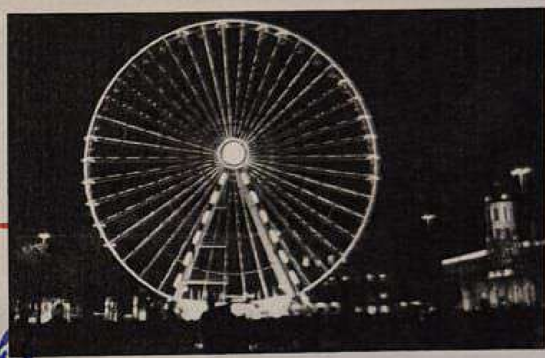
Mécanique MC1 Cinématique

Historique

Antiquité : Archimède : Hydrostatique, notion de centre de gravité (250 avant JC).
XVI^e : Copernic : description cinématique du système solaire.
Kepler : mouvement des planètes.
Galilée : principe d'inertie, principe de relativité galiléenne.
XVII^e : Huygens : Mouvements de rotation.
Newton : Les trois lois de la dynamique classique.



I Introduction à la mécanique

1.) Définitions

Mécanique : Etude du mouvement des systèmes matériels.

{solide ; système de solide ; système déformable}

Cinématique : Description du mouvement des corps, indépendamment des causes qui le provoquent.

On ne s'intéresse pas à la masse

Dynamique : Etude des relations entre les causes du mouvement et leurs effets.

On ne s'intéresse qu'aux solides indéformables

2.) Hypothèses de la mécanique newtonienne

1. Possibilité au moins théorique de connaître avec une précision illimitée la position et la vitesse d'un corps à un instant donné.
2. Le temps se déroule de la même façon quel que soit le mouvement du corps considéré (hypothèse d'un temps absolu).

1. La mécanique quantique rejette la première hypothèse (1923-26 Principe de Heisenberg et Dualité onde-particule De Broglie, Heisenberg, Schrödinger et Born).

Il est impossible de connaître avec une précision illimitée la position et la vitesse d'un corps à un instant donné (= principe d'incertitude de Heisenberg).
A toute particule en mouvement on associe une onde (= dualité onde corpuscule).

Pour un système de particules espacées de d, la mécanique classique est une bonne approximation si $\lambda << d$.

$\lambda = h/p = h/mv$ avec h la constante de Planck
d distance moyenne entre 2 particules

2. La théorie de la relativité (restreinte) Einstein 1905 rejette la deuxième hypothèse.

Le déroulement du temps dépend du mouvement du système considéré.
La mécanique classique reste une bonne approximation si $v << c$ où v est la vitesse du corps considéré, et c la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3.10^8$ m.s^{-1}).

ex : électron dans un métal -> Mécanique quantique
particules chargés -> Mécanique relativiste

3.) Repérage dans l'espace et le temps

Solide : Corps supposé indéformable. Les distances entre deux points quelconques de (S) ne varient pas au cours du temps.

Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut choisir un solide de référence (S_{ref}), c'est-à-dire un objet physique par rapport auquel on étudie le mouvement.

Repère d'espace $\Re(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$
O point arbitraire du repère lié à (S_{ref}).
Base cartésienne définie par trois points fixes appartenant à (S_{ref}).

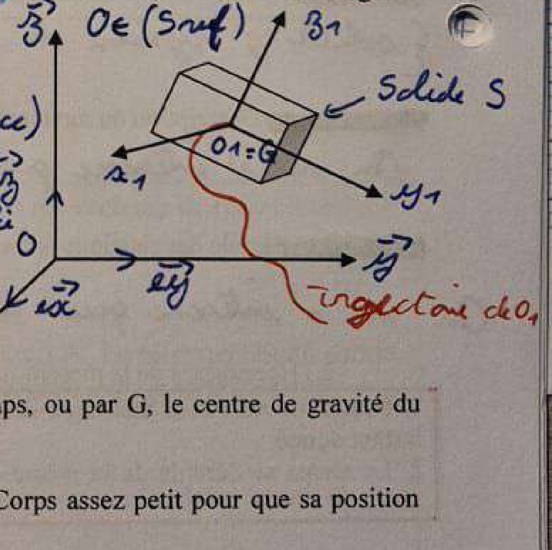
Pour repérer un solide dans l'espace, il faut six paramètres :
- trois coordonnées d'un point O_1 arbitraire du solide (S): On prend parfois le centre de gravité G du solide.
- trois angles qui définissent l'orientation des axes du repère $\Re_1$ lié au solide (S), par rapport au repère lié au solide de référence (S_{ref}).

Repère temporel : {date origine + horloge de référence}
Horloge de référence : permet de mesurer la durée entre deux événements. On mesure le nombre de fois que se produit un phénomène cyclique.

*** **Référentiel : {repère d'espace lié à un solide de référence + repère temporel}** = Observateur muni d'une horloge

=> Un observateur et son horloge

Ex : Solide (S) Chat en mvt ds une gare
Observateur fixe ds la gare (solide de référence)
décrit le mvt des chat
Si l'observateur monte dans un wagon => mvt modifié



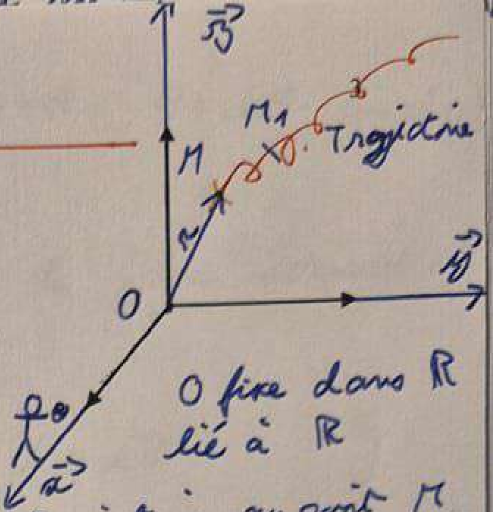
Trajectoire : Ensemble des points de l'espace occupés par O_1 au cours du temps, ou par G, le centre de gravité du solide considéré.

Point matériel M(m) : Point géométrique M, auquel on associe une masse m. Corps assez petit pour que sa position puisse être définie à l'aide de trois coordonnées seulement. = Objet ponctuel.

Dans un référentiel, un événement (M,t) est défini par les paramètres (x,y,z,t) = point de l'espace-temps.
Unité de longueur : le mètre. Unité de temps : la seconde. (Voir poly "les grandeurs mesurables")

Ex : Point Matériel Mouche (M) on ne s'intéresse qu'à sa trajectoire, M est confondu avec son centre de gravité
On ne s'intéresse pas à son mouvement propre

II Cinématique du point



O fixe dans R
lié à R

1.) Vecteurs vitesse et accélération

Pour un point M en mouvement par rapport à un référentiel $\mathfrak{R}$ de centre O :
L'observateur est lié à $\mathfrak{R}$ et regarde M.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

Vecteur vitesse instantanée : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{\ell}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

$\vec{v}\ M/R = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}\right) = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{dt}$ $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire au point M

Vecteur accélération instantanée : $\vec{a}\left(\frac{M}{\mathfrak{R}}\right) = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathfrak{R}}$

Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$

où $M(x;y;z)$ à t et $M'(x+dx;y+dy;z+dz)$ à $t+dt$

On peut exprimer ensuite ces vecteurs dans différentes bases locales, ou repères de projection.

2.) Coordonnées cartésiennes

Base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$:

$\|\vec{e_x}\| = \|\vec{e_y}\| = \|\vec{e_z}\| = 1$ et $\vec{e_x} \perp \vec{e_y} \perp \vec{e_z}$

$(\vec{e_x};\vec{e_y};\vec{e_z})$ forme une base directe

⚠ On note $\vec{e_x}$ ou $\vec{u_x}$ un vecteur unitaire

M a pour coordonnées (x, y, z). M décrit tout l'espace pour (x, y, z) $\in\ ]-\infty;+\infty[$

Repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ lié au référentiel : $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ sont indépendants de M, donc du temps. ***

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \to x(t); y(t); z(t)$
Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$
Vecteur accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$

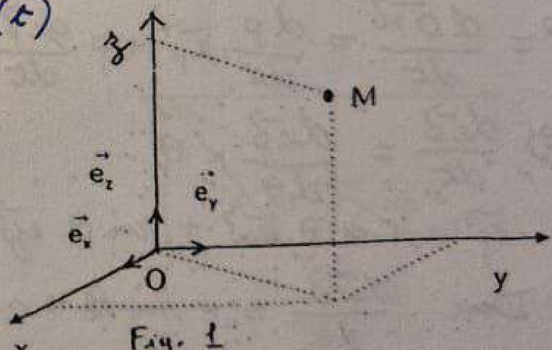
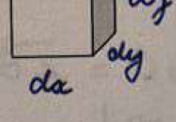


Fig. 1

Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
Volume élémentaire : dV=dx×dy×dz.



Remarque :

$\frac{d\vec{e_x}}{dt} = \frac{d\vec{e_y}}{dt} = \frac{d\vec{e_z}}{dt} = 0$

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

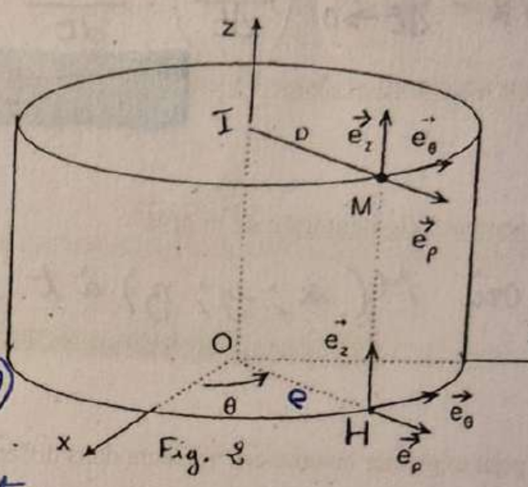
$M(x;y;z)$, $M'(x+dx;y+dy;z+dz)$ à $t+dt$

$dl = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$

3.) Coordonnées cylindriques

Base orthonormée directe instantanée $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.

$\vec{e}_\rho$ vecteur unitaire radial,
$\overrightarrow{e_\theta}$ vecteur unitaire orthoradial. } dépendent du temps



H projection orthogonale de M sur (Oxy).
I projection orthogonale de M sur (Oz).

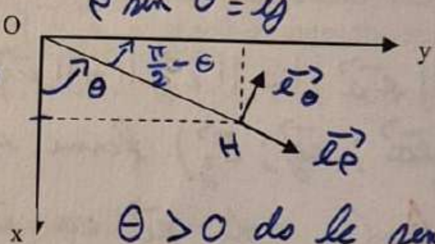
rayon polaire $\rho = OH$ $\overline{OH} = \rho\vec{e}_\rho$
angle polaire $\theta = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_\rho})$ } coordonnées polaires dans le plan $(r;\theta)$
cote $z = \overline{OI} = \overline{HM}$ $\overrightarrow{HM} = z\vec{e}_z$

M (ρ, θ, z) où $\rho \in [0;+\infty[$; $\theta \in [0; 2\pi[$; $z \in]-\infty;+\infty[$ à démontrer

Relations avec les coordonnées cartésiennes :
$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$.

$\rho\sin\theta = y$

$x = \rho\cos\theta$

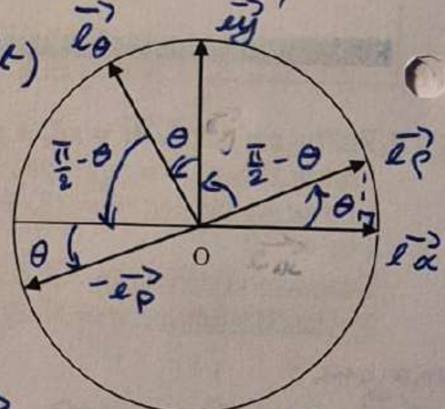


θ > 0 ds le sens indiqué

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$
Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot\theta\vec{e}_\theta + \dot z\vec{e}_z$
Vecteur accélération : $\vec{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta)\vec{e}_\theta + \ddot z\vec{e}_z$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot\theta\vec{e}_\theta \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot\theta\vec{e}_\rho$$

$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}}$ $\rho(t)$; $z(t)$; $\theta(t)$; $\overrightarrow{e_\rho}(t)$; $\overrightarrow{e_\theta}(t)$



$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta}\times\dot\theta$$

$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

Donc $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = -\sin\theta + \cos\theta = \overrightarrow{e_\theta}$ dc $\boxed{\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \overrightarrow{e_\theta} \text{ et } \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot\theta\overrightarrow{e_\rho}}$

D'où $\boxed{\vec{v} = \dot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot z\overrightarrow{e_z}}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \dot\rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \dot\rho\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \rho\ddot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \rho\dot\theta\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} + \ddot z\overrightarrow{e_z}$$

$$= \ddot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \dot\rho\overrightarrow{e_\theta} + \dot\rho\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \rho\ddot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \rho\dot\theta^2\overrightarrow{e_\rho} + \ddot z\overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot z\overrightarrow{e_z}}$$

__Déplacement élémentaire :__ $M(\rho\, \theta\, z) \to M'(\rho + d\rho\,;\ \theta + d\theta\,;\ z + dz)$

$$\vec{dl} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M'}$$

variation de z de dz θ de $d\theta$ ρ de $d\rho$ de façon indépendante

- $\overrightarrow{MM_1} = dz\,\vec{e_z}$
- $M_2M' \simeq d\rho$ $\overrightarrow{M_2M'} \simeq \overrightarrow{M_1M_2'}$ $\Rightarrow M_2M' \simeq d\rho\,\vec{e_\rho}$
- $M_1M_2 = I'M_1 \times d\theta = IM\,d\theta = \rho\,d\theta$

Donc $M_1M_2 = \rho\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

Donc
$$\vec{dl} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$$
$$= \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$$
$$= \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}$$
$$= \vec{v}$$

Les angles θ sont considérés infiniment petit

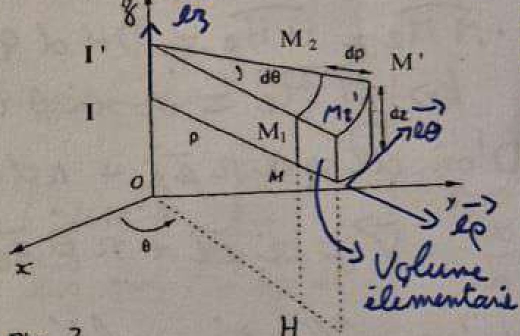
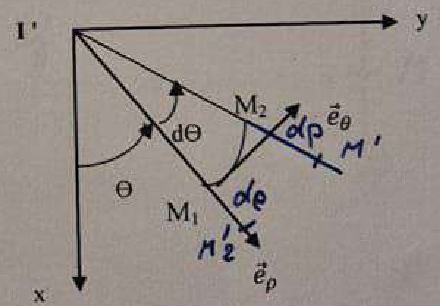


Fig. 3



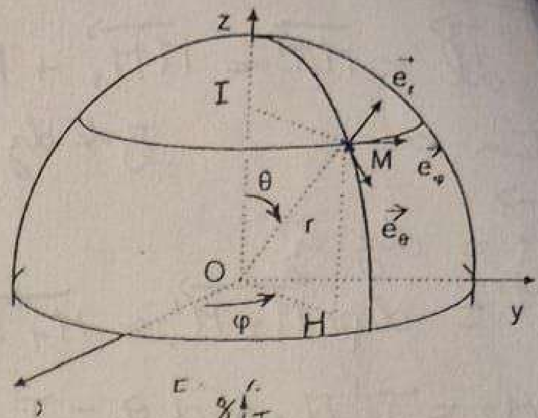
Déplacement élémentaire $\vec{dl} = \vec{dr} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
Volume élémentaire dV=dρ×ρdθ×dz.

4.) Coordonnées sphériques (fig. 4)

Base orthonormée directe instantanée $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}\right)$:

H projection orthogonale de M sur (Oxy).

r = OM. $\geqslant 0$



colatitude $\theta = \left(\vec{e_z}, \overrightarrow{OM}\right)$

longitude $\varphi = \left(\vec{e_x}, \overrightarrow{OH}\right)$ } θ et φ inversés en SI

M (r, θ, φ) où r ∈ [0; +∞[; θ∈ [0; π]; φ∈ [0; 2π[

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r$

à savoir

relations

Relations avec les coordonnées cartésiennes : $\overline{OH} = \overline{IM} = r\,sin\theta$

$x = \overline{OH}\,cos\varphi = r\,sin\theta\,cos\varphi$

$y = \overline{OH}\,sin\varphi = r\,sin\theta sin\varphi$

$z = \overline{OI} = r\,cos\theta.$

O fixe tout le reste dépend du temps

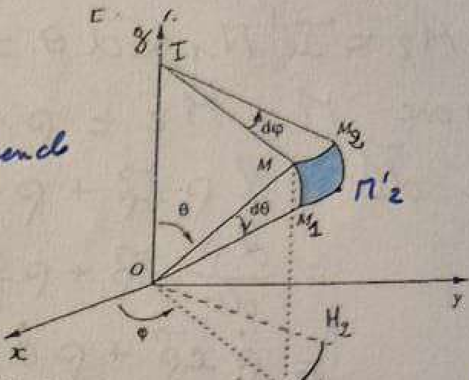


Fig. 5

$\cdot M(r\ \theta\ \varphi) = M(r + dr;\ \theta + d\theta;\ \varphi + d\varphi)$

$\cdot \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_3}$

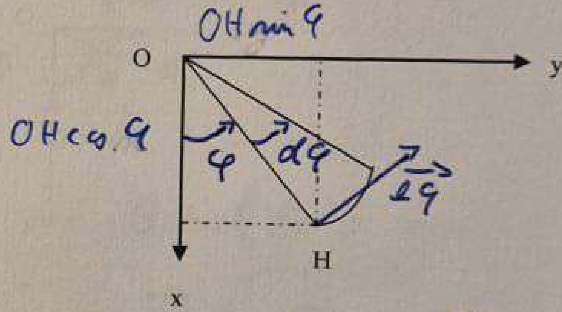
on fait varier r de dr ; θ de dθ ; φ de dφ

$\cdot \overrightarrow{MM_3} = dr\,\vec{e_r}$

$\cdot \widehat{MM_1} = OM\,d\theta = r\,d\theta \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

$\cdot \widehat{MM_2} = \widehat{HH_2} = OH\,d\varphi = r\sin\theta\,d\varphi$

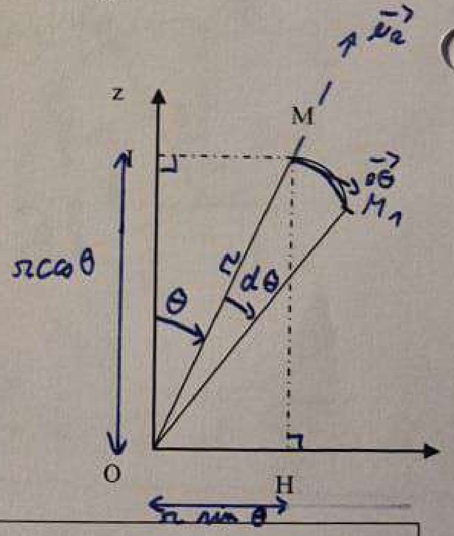
$\hookrightarrow \overrightarrow{MM_2} = r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$



D'où $\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

$\frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{V} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$

L'accélération sphérique est donnée



Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$

Surface élémentaire : dS=rdθ×rsinθdφ (fig. 5). $= \widehat{MM_1} \times \widehat{MM_2}$

Volume élémentaire : dV=dS×dr=dr×rdθ×rsinθdφ

III Exemples de mouvements simples.

1.) Définitions

Un mouvement est uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante.
Un mouvement est accéléré si la norme du vecteur vitesse augmente.
Un mouvement est décéléré si la norme du vecteur vitesse diminue.

Un mouvement est uniformément varié si $\dfrac{dv}{dt}$ est constante.

Le mouvement est uniformément accéléré si $\dfrac{dv}{dt} = cste > 0$.

Le mouvement est uniformément décéléré si $\dfrac{dv}{dt} = cste < 0$.

2.) Mouvements rectilignes

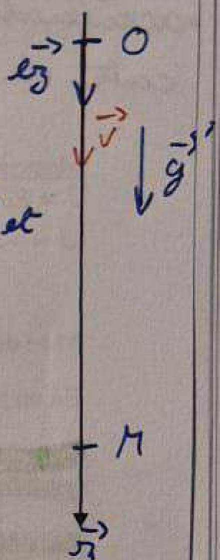
a) Définition : La trajectoire est une droite.

$\vec{OM} = x\,\vec{e_x}$
$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e_x}$
$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e_x}$

Mouvement rectiligne uniforme : $\dot{x} = cste = v_0$
$\vec{a} = 0$
$x = v_0 t + cste$
$\hookrightarrow \vec{OM} = (v_0 t + cste)\,\vec{e_x}$

b) Exemple : Mouvement de vecteur accélération constante

Système $\{M(m)\}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen



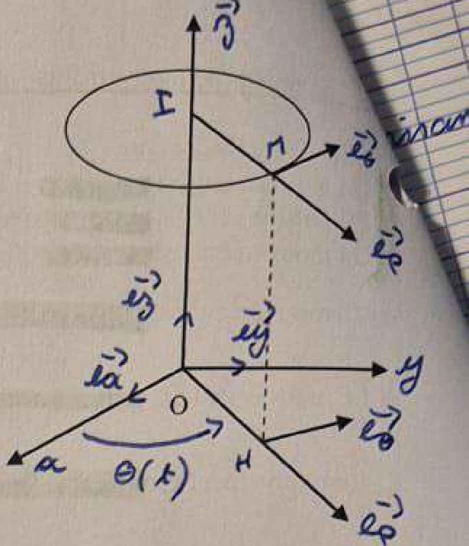
LFD : $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = g = cste$

CI : à $t = 0$ M est au point O ; $\vec{v_0} = v_0\,\vec{e_z}$ (vers le bas)

On projette sur $\vec{e_z}$ $\Rightarrow$ Mouvement uniquement selon $\vec{e_z}$ car $\vec{F} = m\vec{g}$ et $\vec{v_0}$ suivant $\vec{e_z}$

$\vec{v} = at + v_0 = gt + v_0$
$\vec{z} = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + cste$ $\Rightarrow \vec{OM} = \left(\frac{gt^2}{2} + v_0 t\right)\vec{e_z}$

3.) Mouvements circulaires



a) Définition La trajectoire est un cercle de rayon R, centré sur I, d'axe (Oz).
coordonnées cylindriques :

$\rho = IM = OH = \text{cste} = R$

$z = \overline{OI} = \text{cste} = z_I$

$\theta(t)$

b) Exemple : Mouvement circulaire non uniforme :

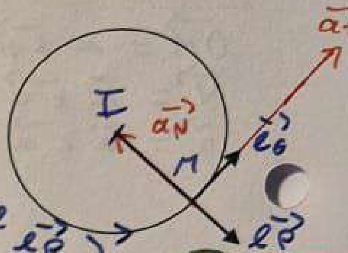
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = R\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$ où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire.

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho$

• Position $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = \boxed{z_I\vec{e_z} + R\vec{e_\rho}}$

O ; $\vec{e_z}$; z_I ; R sont constants et $\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \dot\theta\vec{e_\theta}$



• Vitesse $\vec{v}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot\theta\vec{e_\theta} = \boxed{R\omega\vec{e_\theta}}$

où ω est la vitesse angulaire

• Accélération $\vec{a}(M/R) = R\ddot\theta\vec{e_\theta} - R\dot\theta^2\vec{e_\rho} = R\dot\omega\vec{e_\theta} - R\omega^2\vec{e_\rho}$

$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{R}\vec{e_\rho}}$ où $\boxed{\vec{v} = v\vec{e_\theta}}$, $v = R\dot\theta$

• accélération tangentielle dans le sens du mouvement suivant $\vec{e_\theta}$ } $a_T = \frac{dv}{dt}$

• accélération normal ~~dans~~ le centre de la trajectoire } $a_N = \frac{v^2}{R}$

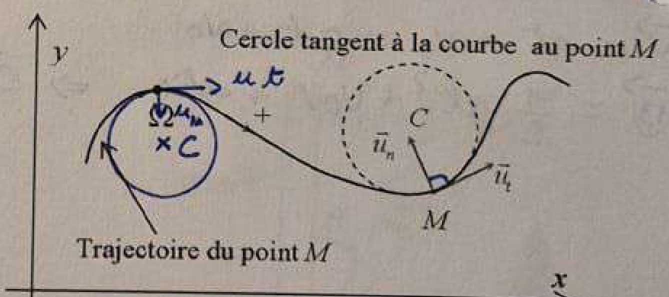
Mouvement circulaire uniforme : v = Cte donc ω = Cte $= \dot\theta$

$\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_\rho = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho$ $\left(\dot\omega = 0 = \frac{dv}{dt}\right)$

4.) Repérage local le long d'une trajectoire plane : repère de Frenet

M se déplace le long d'une trajectoire dans le plan (xOy)



En un point M quelconque de la trajectoire, on définit :

$\vec{u}_t$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire, orienté dans le sens de parcours de la trajectoire.

$\vec{u}_n$: Vecteur unitaire normal à la trajectoire, dirigé vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire. (vers C)

Repère de Frenet : repère mobile $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$

Vitesse : $\vec{v} = v\vec{u}_t$

On assimile le mouvement au voisinage du point M à un mouvement circulaire quelconque sur le cercle osculateur (= cercle tangent localement au point M à la trajectoire, de centre C de rayon R).

R est appelé rayon de courbure de la trajectoire au point M.

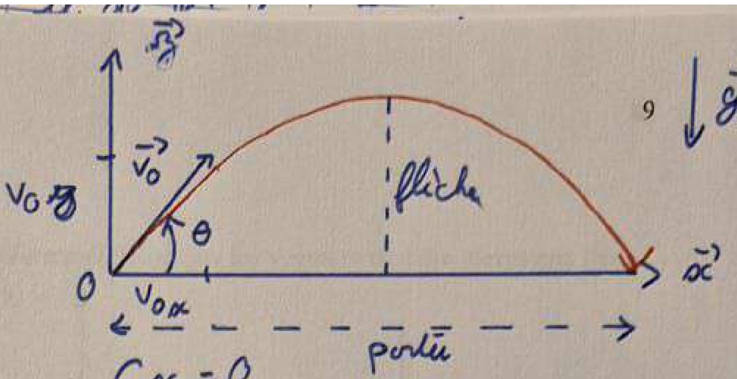
Accélération : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$

Généralisation de la trajectoire circulaire

$\vec{e_\theta} \longrightarrow \vec{u_t}$

$\vec{e_\rho} \longrightarrow -\vec{u_N}$

5.) Application : tir de projectile sans frottements



Système $\{M(m)\}$

Référentiel terrestre galiléen

Forces $\vec{P} = m\vec{g}$

LFD : $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -g \end{cases}$

$\vec{v} \begin{cases} x = V_{0x} \\ y = 0 \\ z = -gt + v_{0z} \end{cases}$

$\vec{OM} \begin{cases} x = v_{0x}\, t \\ y = 0 \\ z = -\frac{g}{2} t^2 + v_{0z}\, t \end{cases}$

Donc on a :

$$z = \frac{-g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\, x$$

$$z = \frac{-g\, x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} + \tan\theta\, x$$

Max atteint en $x = \dfrac{\tan\theta\, v_0^2 \cos^2\theta}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$

Donc Max $= \dfrac{-v_0^2 \sin^2\theta}{2g} + \dfrac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = z_S$

Portée $z_P = 0 \Rightarrow \dfrac{-g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} + \tan\theta\, x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x_P = \dfrac{2 V_{0x} V_{0y}}{g}$

$= 2 x_S$

Portée max $\dfrac{dx_P}{d\theta} = \dfrac{v_0^2}{g}\, 2\cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \pi/4$

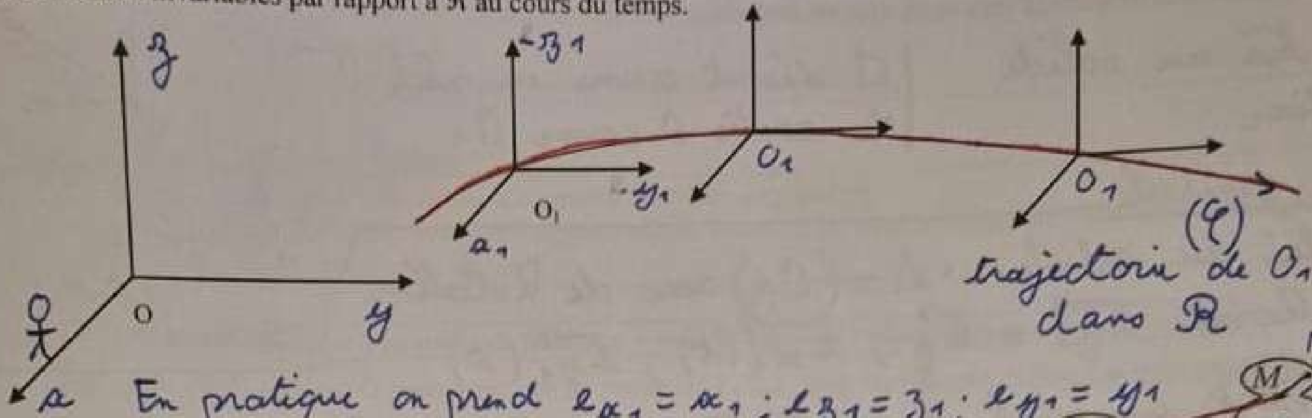
IV Cinématique du solide

$\mathcal{R}_1(O_1\, x_1\, y_1\, z_1)$ lié au solide

$\mathcal{R}(O\, x\, y\, z)$ fixe lié à l'observateur

1.) Translation

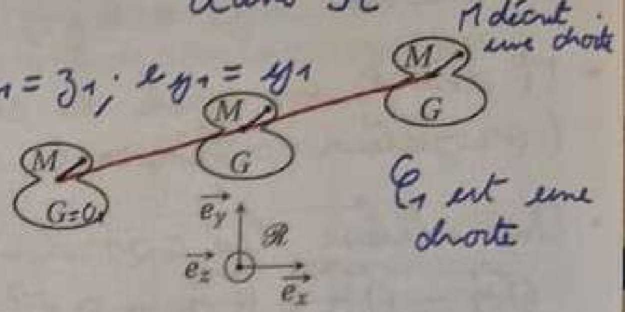
a) Définitions Un solide est en translation par rapport à un référentiel $\mathfrak{R}$ lorsque les vecteurs de base cartésiens liés au solide restent invariables par rapport à $\mathfrak{R}$ au cours du temps.



En pratique on prend $e_{x_1} = x_1$; $e_{z_1} = z_1$; $e_{y_1} = y_1$

Translation rectiligne : O_1 a une trajectoire rectiligne par rapport à $\mathfrak{R}$

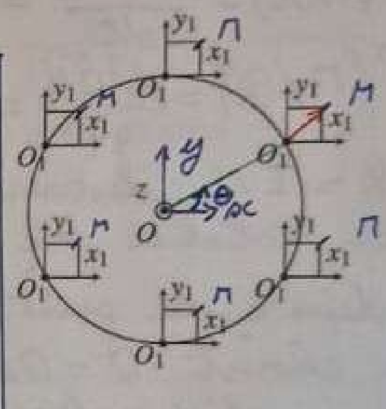
$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{cste}$



Translation circulaire : O_1 a une trajectoire circulaire par rapport à $\mathfrak{R}$

Exemple : Nacelle d'une grande roue.

$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{cste}$



Translation circulaire.

Calcul générale

• $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$ où $\overrightarrow{O_1M} = x_1\vec{e_{x_1}} + y_1\vec{e_{y_1}} + z_1\vec{e_{z_1}}$

z_1 ; x_1 ; y_1 cste car $\left| \begin{array}{l} M \in \text{Solide} \\ O_1 \end{array}\right.$

$\vec{e_{x_1}} = \vec{e_x}$; $\vec{e_{y_1}} = \vec{e_y}$; $\vec{e_{z_1}} = \vec{e_z}$

• $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/\mathcal{R} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}/\mathcal{R} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\mathcal{R}$

$= \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}/\mathcal{R}$

$= \vec{v}(O_1/\mathcal{R})$

• De façon analogue $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(O_1/\mathcal{R})$

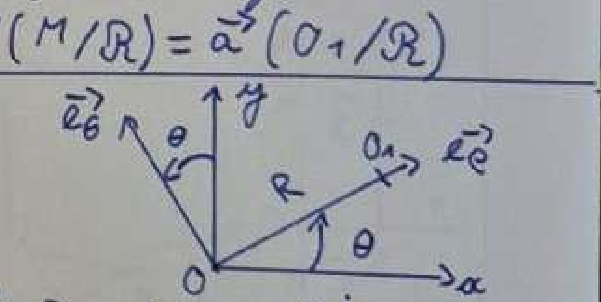
Cas particulier de la translation circulaire

O_1 décrit un cercle de centre O

$\overrightarrow{OO_1} = R\vec{e_\rho}$ (coordonnées cylindriques)

$\vec{v}(O_1/\mathcal{R}) = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

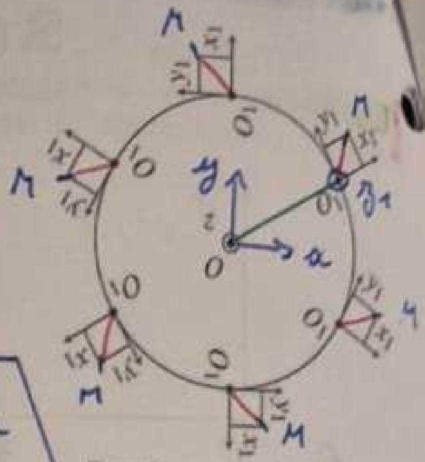
$\vec{a}(O_1/\mathcal{R}) = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{R}\vec{e_\rho}$ où $v = R\dot{\theta}$



> Tous les points d'un solide en translation ont même mouvement. Le mouvement du solide est complètement décrit par le mouvement d'un de ses points, par exemple le centre de gravité G.

2.) Rotation autour d'un axe fixe Δ

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous ses points sont en mouvement circulaire autour de Δ.



Rotation autour de (Oz).

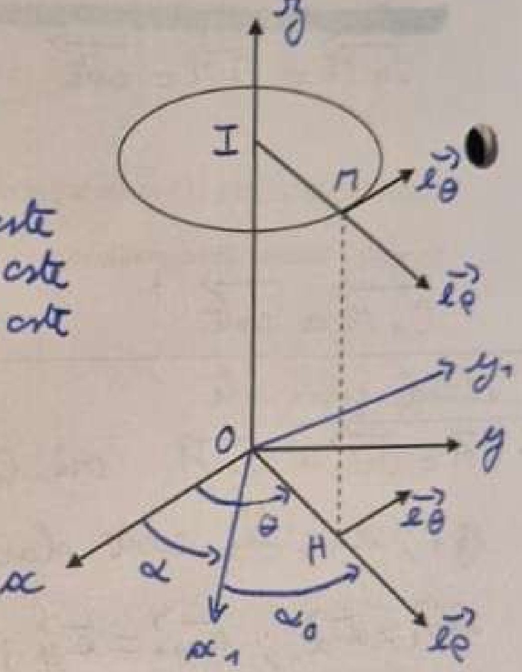
Exemple : Nacelle d'une grande roue qui s'est emballée.

$\mathcal{R}_1$ lié au solide
$\mathcal{R}$ fixe

M décrit aussi un cercle de centre O comme O_1

Etude général

- $\mathcal{R}_1$ lié au solide • $\Delta = (Oz)$ axe de Rotation
- On choisit $\vec{e}_{z_1} = \vec{e}_z$; $\vec{e}_{x_1}(t)$; $\vec{e}_{y_1}(t)$
- M décrit un cercle de centre $I \neq O$ (projection orthogonal de M sur (Oz))
- On utilise les coordonnées cylindriques



$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = \rho \vec{e}_\rho + z_I \vec{e}_z$ $\quad R = cste$

$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ $\quad z_I = cste$, $\vec{e}_z = cste$

$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$

⚠ $R = IM$, distance du point M à l'axe de rotation donc $\vec{a}$ et $\vec{v}$ dépendent de M

- θ dépend du point considéré M
  On choisit $O = O_1$ $\alpha = (\widehat{x\,O\,x_1})$
  $M \in$ solide fixe dans la base 1 $\Rightarrow \alpha_0 = cste$
  $\theta = \alpha + \alpha_0$; $\dot{\theta} = \dot{\alpha} = \omega$; $\ddot{\theta} = \ddot{\alpha} = \dot{\omega}$ où ω = vitesse angulaire du solide par rapport à l'axe

Vecteur rotation : $\vec{\Omega} = \omega\vec{e}_z$

- parallèle à l'axe de rotation, et suivant la règle du tire bouchon
- de norme la vitesse angulaire de rotation

Remarque : L'axe de rotation n'appartient pas forcément au solide.