Mécanique. MC3 Energie du point matériel

I Travail et puissance d'une force

1.) Définitions

Hypothèse : point matériel M(m), soumis à la force $\vec{F}$, de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\Re$ quelconque.

Définition : Travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$: $W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl}$: N.m = J

Travail élémentaire de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $\overrightarrow{dl}$: $\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

Puissance de $\vec{F}$: $P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$: $N m s^{-1} = J s^{-1} = W$

$P(\vec{F}) > 0$ Puissance motrice, ou travail moteur (= force motrice).
$P(\vec{F}) < 0$ Puissance résistante, ou travail résistant (= force résistante).

RQ: pour une force cst :

$$W_{1\to2} = \vec{F}.\overrightarrow{M_1M_2}$$

RQ: passage d'une forme à l'autre.

$$W_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W \quad \text{où } \delta W = \vec{F}.\vec{dl}$$

Puissance de $\vec{F}$:

$$P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \quad \text{où } \vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt}$$

RQ:
LFD: $\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad U_F = N = kg.m.s^{-2}$

$U_W = J = Nm = kg m^2.s^{-2}$

2.) Exemples de forces qui ne travaillent pas

-> Reaction du support:

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{R_N}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R_N}.\vec{dl} = 0 \quad \text{car } \vec{R_N} \perp \vec{dl} \quad \text{où } \vec{dl} = \vec{v}dt$$

-> Tension du fil:

$$W(T)_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{T}.\vec{v}dt = 0 \quad \text{car } \vec{T} \perp \vec{v}$$

$$\vec{OM} = l\vec{e_r} \quad v = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

-> Force Magnetique: $\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F_m}) = \int_{M_1}^{M_2} \underbrace{(q\vec{v}\wedge\vec{B})}_{\perp \vec{v}dt = 0}.\vec{dl} \quad \text{où } \vec{dl} = \vec{v}dt$$

II Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

1.) Energie cinétique :

Pour un point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\Re$ quelconque, on définit l'énergie cinétique $\boxed{Ec\,(M/\Re) = \frac{1}{2}\, m\, v^2(M/\Re)}$ $: J = kg\, m^2 . s^{-2}$

2.) Enoncé des théorèmes

Hypothèse : point matériel M(m) soumis à la résultante des forces $\vec{F}$, de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\Re_g$ supposé galiléen.

Théorème de l'énergie cinétique dans $\Re_g$ galiléen $W_{1\to 2}(\vec{F}) = E_c(t_2) - E_c(t_1)$

Théorème de la puissance cinétique dans $\Re_g$ galiléen $P(\vec{F}) = \frac{dE_c}{dt}$

Théorème de l'énergie cinétique sous forme infinitésimale dans $\Re_g$ galiléen $\delta W = dE_c$

démo : Travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de M_1 à M_2 :

$$W_{1\to 2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\, \vec{dl}$$

2eme lois de Newton:

$\vec{F}$: resultante des forces

$m\vec{a} = \vec{F}$

pour m cst

$\vec{dl} = \vec{v}\,dt$

$$\Rightarrow W_{1\to 2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} m\vec{a}.\vec{v}\,dt = \int_{M_1}^{M_2} m \frac{dv}{dt}.v\,dt$$

RQ: $\frac{d(\vec{v}.\vec{v})}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d(\vec{v}.\vec{v})}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}$$

$$\Rightarrow W_{1\to 2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt}\,dt$$

$\frac{m}{2}$ cst $\Rightarrow W_{1\to 2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$

$$\Rightarrow W_{1\to 2}(\vec{F}) = \left[\frac{1}{2} m v^2\right]_{M_1}^{M_2} = \left[E_c\right]_{M_1}^{M_2}$$

Demo 2: pour la puissance.

$$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}$$

$= m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}$ d'après la 2ème lois de Newton

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

$\Rightarrow P(\vec{F}) = \frac{dE_c}{dt}$ <— TR de la puissance cinétique

Demo3: (infinitesimale)

$P(\vec{F})dt = dE_c$

$\Rightarrow \vec{F}.\vec{v}\,dt = dE_c$

$\Rightarrow \vec{F}.\vec{dl} = dE_c$

$\Rightarrow \delta W = dE_c$ -> TR de Ec

III Energie potentielle et mécanique

1.) Energie potentielle

Hypothèse : Point matériel M(m), soumis à une force $\vec{F}$, dans un référentiel $\Re$ quelconque.

Propriété : Si le travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$ ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions initiales et finales, la force est dite conservative et le travail s'écrit sous la forme :

intégral -> $\boxed{W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{dl} = [-Ep]_{M_1}^{M_2}}$ $\boxed{\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -dEp}$ <- différentiel

La fonction Ep est appelée Energie potentielle de M associée à $\vec{F}$. Elle est définie à une constante additive près. C'est une fonction des coordonnées d'espace.

Le travail d'une force conservative le long d'un trajet donné est égal à la diminution d'énergie potentielle. On dit que la force dérive d'une énergie potentielle. Pour une trajectoire fermée, W = 0.

2.) Exemples

-> Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P}.\vec{Dl}$$

cordonné cartesiennes : $\vec{dl} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$

$$\Rightarrow W_{1\to2}(\vec{P}) = \int_{M_1} -mg\vec{e_z}.(dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z})$$

$e_z . e_x = 0$
$e_z . e_y = 0$
$e_z . e_z = 1$

$$\Rightarrow W_{1\to2}(\vec{P}) = -\int_{M_1} mg\, dz = [-mgz]_{M_1}^{M_2}$$

or $W_{1\to2}(\vec{P}) = [-Ep]_{M_1}^{M_2}$

$\Rightarrow \boxed{E_{PP} = mgz + cst}$ pour $e_z \uparrow$

-> Force de rappel du ressort : $\rightarrow \vec{e_x}$

$\vec{F_r} = -k(l-l_0)\vec{e_x}$

On pose $x = l - l_0 \Rightarrow \vec{F_r} = -kx\vec{e_x}$

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F_r}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_r}.\vec{dl}$$

cordonnée cartesienne : $\vec{dl} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$

$$\Rightarrow W_{1\to2}(\vec{F_r}) = \int_{M_1}^{M_2} -kx\vec{e_x}.(dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z})$$

$\vec{e_z}.\vec{e_x} = 0$
$\vec{e_y}.\vec{e_x} = 0$
$\vec{e_x}.\vec{e_x} = 1$

$$\Rightarrow W_{1\to2}(\vec{F_r}) = \int_{M_1}^{M_2} -kx\, dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{M_1}^{M_2}$$

$\Rightarrow \boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + cst}$ $x = l - l_0$

Frottement solide : $\vec{R_T}$ sens contraire au déplacement

$$W_{1\to2}(\vec{R_T}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R_T}.\vec{dl} = -\int_{M_1}^{M_2} R_T \times dl = -R_T\, M_1M_2$$ -> longueur de la courbe

$\vec{R_T}$ n'est pas conservative : son travail dépend du chemin suivi entre M_1 et M_2. On ne peut pas l'écrire sous forme $-\Delta E_p$

$W_{M_1\to M_1}(R_T) \neq 0$ pour une trajectoire fermée

3.) Théorème de l'énergie mécanique

Hypothèse : Point matériel M(m), soumis à la résultante des forces $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$, dans un référentiel $\Re_g$ supposé galiléen.

où : - $\vec{F}_c$ est la résultante des forces conservatives, de travail W_c dérivant de l'énergie potentielle totale Ep. $= \Sigma E_{p_i}$

- $\vec{F}_{nc}$ est la résultante des forces non conservatives de travail W_{nc}.

Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{[Em]_{M_1}^{M_2} = W_{nc}}$

où :Em = Ec + Ep est l'énergie mécanique du point matériel. Em est une fonction des coordonnées d'espace et de leurs dérivées. Elle dépend du référentiel. Elle est définie à une constante additive près.
Ec est l'énergie cinétique.
Ep correspond à la somme des énergies potentielles associées à chaque force conservative.

Théorème de l'énergie mécanique sous forme infinitésimale, dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{dEm = \delta W_{nc}}$

Théorème de la puissance mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{\frac{dEm}{dt} = P_{nc}}$

démo1: Theorème de l'énergie cinetique:

$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = W_{1\to2}(\vec{F})$

$\vec{F} = \vec{F}_{mc} + \vec{F}_c$

$\Rightarrow W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_1^2 \vec{F}.\vec{dl} = \int_1^2 (\vec{F}_c + \vec{F}_{mc}).\vec{dl}$

$= \int_1^2 \vec{F}_c.\vec{dl} + \int_1^2 \vec{F}_{nc}.\vec{dl}$

$\Rightarrow \Delta E_c = W_{1\to2}(\vec{F}_c) + W_{1\to2}(\vec{F}_{mc})$

$\Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p + W_{1\to2}(\vec{F}_{mc})$

$\Rightarrow \Delta(E_c + E_p) = W_{1\to2}(\vec{F}_{mc})$

$\Rightarrow \Delta E_m = W_{1\to2}(\vec{F}_{mc})$

$\Rightarrow [E_m]_{M_1}^{M_2} = W_{1\to2}(\vec{F}_{mc})$

demo 2: sous forme infinitesimal.

th de l'Ec : $dE_c = \delta W = \vec{F}.\vec{dl}$

$= \vec{F}_c.\vec{dl} + \vec{F}_{mc}.\vec{dl}$

$\Rightarrow dE_c = \delta W_c + \delta W_{mc}$

où $\delta W_c = -dE_p$

$\Rightarrow dE_c + dE_p = \delta W_{mc}$

$\Rightarrow dE_m = \delta W_{mc}$ où $E_m = E_c + E_p$

$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W_{mc}}{dt} = \frac{\vec{F}_{mc}.\vec{dl}}{dt} = \vec{F}_{mc}.\vec{v}$

$= P(\vec{F}_{mc})$

⚠. $\int_1^2 \delta W_{mc} = W_{mc\,1\to2}$

δ : quantité infinitesimal

d : differentielle d'une fonction Em

$dE_m = E_m(x+dx, y+dy, z+dz) - E_m(x,y,z)$

4.) Conservation de l'énergie mécanique

Propriété : L'énergie mécanique se conserve si toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle. Elle est alors donnée par les conditions initiales.

Définition : On appelle intégrale première du mouvement toute quantité ne faisant intervenir que les coordonnées de la position et la vitesse et qui se conserve au cours du mouvement.
La conservation de l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement

Remarque : L'énergie mécanique ne se conserve pas dans les cas où il y a des frottements. Seule l'énergie totale se conserve : une partie de l'énergie mécanique aura été transformée en chaleur. cf: thermo

5.) Exemple : Distance d'arrêt d'une luge

CI : la luge est lancé de A avec une vitesse v_0

syst : {luge : M(m)}

Rpj : terrestre supp galileen.

force : $\vec{P} = m\vec{g}$ de A à C

$\vec{R_N}$

$\vec{R_T}$ de B à C

Théorème de l'énergie mecanique :

$\Delta E_m = W_{A \to C}(\vec{F_{nc}})$

$E_{pp} = mgz + cst$

$W(\vec{R_N}) = 0$ ($\vec{R_N} \perp$ deplacement)

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$\Rightarrow \Delta E_m = W_{A \to C}(\vec{R_T})$ où $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgz + cst$

calculer $\Delta E_m = E_m(C) - E_m(A)$

$W_{B \to C}(\vec{R_T}) = \int_B^C \vec{R_T} \cdot \vec{dl} = -\int_B^C \|\vec{R_T}\| \, dl$.

et $\|\vec{R_T}\| = f \|\vec{R_N}\|$

Pour trouver $\|\vec{R_N}\|$: LFD pour $M \in [BC]$.

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$

M trajectoire rectiligne sur [BC]

$\vec{v} = v\vec{e_x}$ $\quad \vec{a} = a\vec{e_x}$

Proj sur (Oz) : $0 = \|\vec{R_N}\| - mg$

$\Rightarrow \|\vec{R_N}\| = mg$.

$\Rightarrow \|\vec{R_T}\| = fmg$

$W_{A \to C}(\vec{R_T}) = -\int_B^C fmg \, dl$ où $dl = dx$

$= -fmg \int_B^C dx$

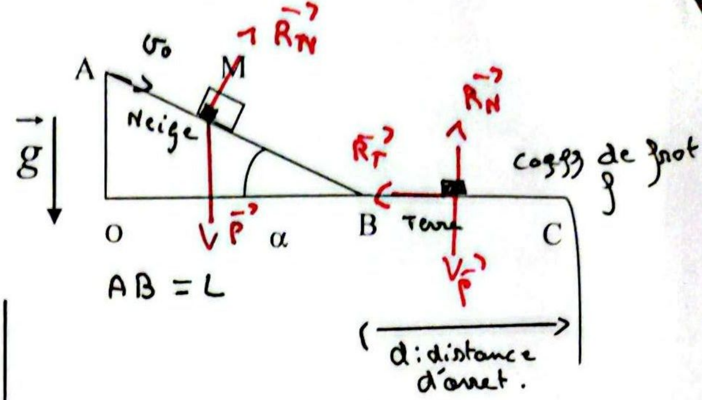
$W_{B \to C}(\vec{R_T}) = -fmgd$ ①

en A : $E_m(A) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgz_A + cst$

en C : $E_m(C) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgz_C + cst$

Neige : pas de frottement solide

Terre : frottement solide



$\Delta E_m = mg(z_C - z_A) - \frac{1}{2} m v_0^2$

$z_A - z_C = OA = L \sin(\alpha)$

$\Delta E_m = -mgL\sin\alpha - \frac{1}{2} m v_0^2$ ②

① = ② $\Rightarrow -fmgd = -mgL\sin\alpha - \frac{1}{2} m v_0^2$

$\Rightarrow d = \frac{1}{fg}\left(Lg\sin\alpha + \frac{v_0^2}{2}\right)$

$$\boxed{d = \frac{L\sin\alpha}{f} + \frac{v_0^2}{2fg}}$$