Hypothèse : On étudie uniquement des systèmes de masse constante.

I Forces

1.) Définition :

Une force peut : - mettre en mouvement un objet
- dévier la trajectoire d'un objet
- déformer un objet.

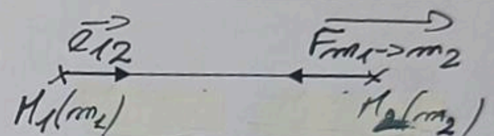
Une force est représentée par un vecteur $\vec{F}$. L'origine est le point d 'application de la force. La norme du vecteur donne la valeur de la force, avec une échelle appropriée. La direction et le sens sont ceux de la force.

2.) Forces à distance

a) Force d'interaction gravitationnelle : Loi d'attraction universelle (Newton 1687)

Deux points matériels M_1 et M_2 de masse gravitationnelle m_1 et m_2, et distants de r, exercent l'un sur l'autre une force attractive, appelée force d'interaction gravitationnelle :
$\vec{F}_{m_1 \to m_2} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12} = m_2\vec{G}_1(M_2)$ $\mathcal{G} = 6{,}67.\ 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} Constante de gravitation

=> $\boxed{\vec{e}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}}$ vecteur unitaire de M_1M_2 m en kg



Champ de gravitation créé par m_1 en M_2 : $\vec{G}_1(M_2) = -\mathcal{G}\frac{m_1}{r^2}\vec{e}_{12}$

Poids : force gravitationnelle exercée par la terre sur M(m) $\vec{P} = m\vec{g}$ où $\vec{g} = -g\vec{e}_z$
$\vec{g}$ est le champ de pesanteur; $\vec{e}_z$ est suivant la verticale ascendante.
g =9,81 m.s^{-2} est l'accélération de la pesanteur au voisinage du sol, à une latitude $\lambda = 45°$.

g dépend de la latitude et de l'altitude

b)Forces électromagnétiques

- force d'interaction électrostatique : Loi de Coulomb

Deux points matériels immobiles M_1 et M_2 de charge électrostatique q_1 et q_2, et distants de r, exercent l'un sur l'autre une force, appelée force d'interaction électrostatique :
$\vec{F}_{q_1 \to q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_{12} = q_2\vec{E}_1(M_2)$ $\varepsilon_0 = 8{,}854\ .\ 10^{-12}$ F.m^{-1} Permittivité absolue du vide

$\vec{e}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}$ q en coulomb (C)

$\vec{F}_{q_1 \to q_2}$ répulsif si $q_1 q_2 > 0$
$\vec{F}_{q_1 \to q_2}$ attractif si $q_1 q_2 < 0$.

Champ électrostatique créé par q_1 en M_2 : $\vec{E}_1(M_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{e}_{12}$

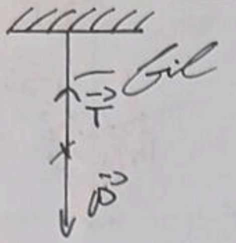
Particule en mouvement dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$: elle est soumise à la force de Lorentz
$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

$\vec{B}$ => champs magnétique créé par des aimants ou des courants.

3.) Tension et force de rappel

a) Tension d'un fil

Le point matériel accroché à un fil est soumis à une force appelée Tension du fil $\vec{T}$, colinéaire au fil, si le fil est tendu.

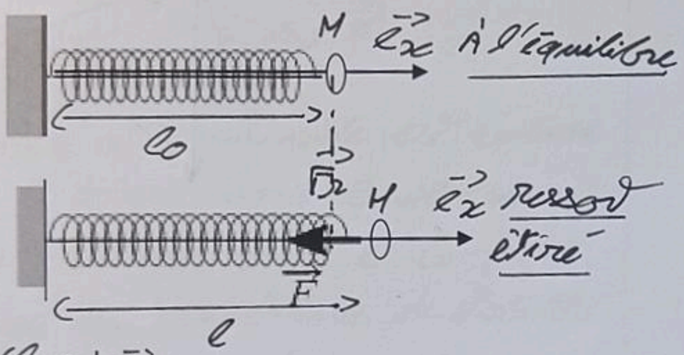


$\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$ à l'équilibre
Si le fil n'est pas tendu, la tension est nulle, $\vec{T} = \vec{0}$

b) Force de rappel d'un ressort

L'anneau accroché au ressort est soumis à une force appelée Force de rappel du ressort $\vec{F}_r$:
k est la constante de raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide, l sa longueur à l'instant considéré,
$\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_x$ où le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ est dans le sens de l'allongement du ressort. On peut poser $x = l - l_0$

⚠ Si on choisit $\vec{e}_x$ dans le sens de la compression du ressort $\vec{F}_r = +k(l - l_0)\vec{e}_x$

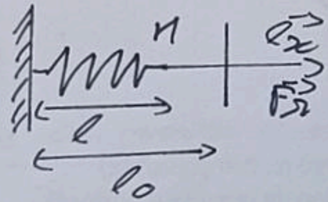


$l > l_0$
$l - l_0 > 0$

$\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_x$

⚠ $\vec{e}_x$ est dans le sens de l'étirement

Ressort comprimé :



$l < l_0$
$l - l_0 < 0$
$\vec{F}_r$ ds le sens de $\vec{e}_x$

4.) Forces de contact (ou forces de liaison)

a) par le support solide

Si un point matériel ou un solide est soumis à se déplacer sur une courbe ou une surface, cela se traduit par :
- des relations supplémentaires sur les coordonnées d'espace
- une force exercée par le support sur le point matériel, appelée $\boxed{\text{Force de contact : } \vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N}$ ✶✶✶

$\vec{R}_N$ est la réaction du support ou composante normale, elle est perpendiculaire au support.
$\vec{R}_T$ est la force de frottement solide ou composante tangentielle, elle est colinéaire et de sens opposé à la vitesse.
$\|\vec{R}_T\| = f_d\|\vec{R}_N\|$ si $v \neq 0$ et $\|\vec{R}_T\| \leq f_S\|\vec{R}_N\|$ sinon (si $v = 0$)

f_d coeff de frottement dynamique
f_s coeff de frottement statique
En général on prend $\boxed{f_d \approx f_s}$

4 Ex : Solide sur un plan incliné

$S = \{$petit cube$\}$ assimilé à son centre de gravité

Réf : terrestre galiléen

Forces : $\vec{P} = m\vec{g}$; $\vec{R} = \vec{R_T} + \vec{R_N}$

A l'équilibre : $\boxed{\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}}$

Sur (Gx) : $-\|\vec{R_T}\| + \|\vec{P_x}\| = 0$

or $\|\vec{P_x}\| = P\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$= mg\sin\alpha$

$\Rightarrow \boxed{-\|\vec{R_T}\| + mg\sin\alpha = 0}$ (1)

Sur (Gy) : $-\|\vec{P_y}\| + \|\vec{R_N}\| = 0$

or $\|\vec{P_y}\| = \cos\alpha$

$\Rightarrow \boxed{-mg\cos\alpha + \|\vec{R_N}\| = 0}$ (2)

(1) $\|\vec{R_T}\| = mg\sin\alpha$

(2) $\|\vec{R_N}\| = mg\cos\alpha$

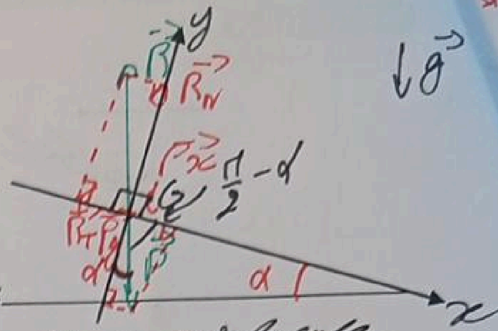
1er cas : à l'équilibre

Or $\|\vec{R_T}\| \leq f_s \|\vec{R_N}\|$

$\Rightarrow \frac{\|\vec{R_T}\|}{\|\vec{R_N}\|} \leq f_s$

$\Rightarrow \frac{(1)}{(2)} \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \leq f_s$

$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha \leq f_s}$ Condition d'équilibre

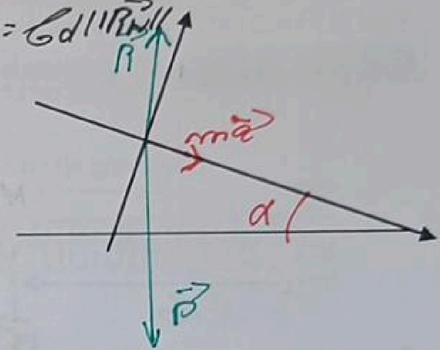


On augmente α pour mettre en mvt le cube

2e cas : cube en mvt

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

où $\vec{R} = \vec{R_T} + \vec{R_N}$ & $\|\vec{R_T}\| = f_d \|\vec{R_N}\|$



b) par un fluide

Force de frottement fluide sur un corps en mouvement : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où $\alpha > 0$ est le coefficient de frottement fluide.

Si on augmente la vitesse : $\vec{F} = -\alpha v^2 \vec{e_v}$

($\vec{e_v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{v}$ $\quad \vec{F} = -\alpha v \vec{v}$ où $v = \|\vec{v}\|$

l'intervalle de vitesse

Poussée d'Archimède

Hypothèses
- Fluide ou ensemble de fluides quelconques (inhomogène, compressible)
- au repos dans un référentiel galiléen, soumis au champ de pesanteur uniforme.

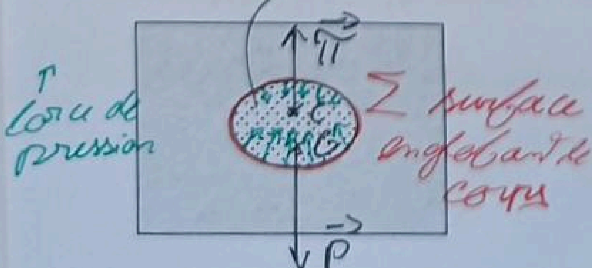
Théorème d'Archimède : Les forces de pression exercées par un fluide, ou un ensemble de fluides, sur un corps totalement immergé sont équivalentes à une force unique, appelée Poussée d'Archimède égale à l'opposé du poids des fluides déplacés et appliquée au centre de poussée C (centre d'inertie du volume de fluide déplacé)

$\vec{\Pi} = -m_{fluide\ déplacé}\vec{g} = -\rho_{fluide} V_{corps}\vec{g}$.

La pression augmente avec la profondeur : la pression est donc plus importante au niveau de la partie basse de la surface Σ.

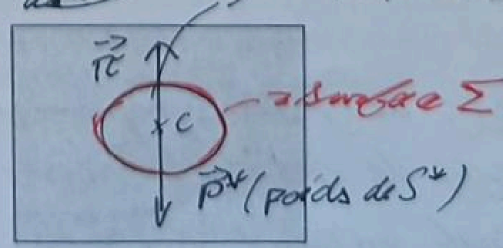
Pb réel

corps (S) est immergé de centre d'inertie G



Pb fictif associé

(S^*) Volume de fluide déplacé



Condition de validité du théorème d'Archimède

D'après la loi fondamentale de la statique des fluides, l'expression de la pression dans le fluide ne dépend que du champ de pesanteur. On admet que la pression exercée sur la surface Σ est la même dans les deux cas. admis

Le fluide ou ensemble de fluide est en équilibre

∘ Condition d'équilibre de (S^*)

$\vec{\Pi} + \vec{P^*} = \vec{0}$ où $\vec{P^*}$ = poids de S^*

$\Rightarrow \vec{P^*} = m_{fluide\ déplacé}\,\vec{g}$

$= \rho_{fluide} V_{déplacé}\,\vec{g}$

($\vec{P^*}$ appliqué au centre d'inertie C de (S^*))

$\Rightarrow \vec{\Pi} = -\vec{P^*}$

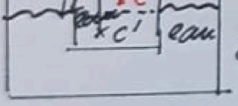
$$\boxed{\vec{\Pi} = -\rho_{fluide} V_{déplacé}\,\vec{g}}$$

⚠ La poussée d'Archimède est valable même pour les corps hors équilibre

. La position relative de C et G peut entraîner des problèmes de stabilité
=> lester le fond d'un voilier de façon à avoir G plus bas/C.

Exemple d'application :

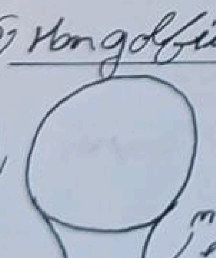
① Glaçon dans un verre d'eau



$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_{air} + \vec{\Pi}_{eau}$

où $\begin{cases} \vec{\Pi}_{air} = -\rho_{air} V_{immergé}\,\vec{g} \\ \vec{\Pi}_{eau} = -\rho_{eau} V_{immergé}\,\vec{g} \end{cases}$

② Montgolfière



Système : {Montgolfière}

Réf : terrestre galiléen

nacelle + passagers + accessoires

Forces : $\vec{P} = \vec{P}_{nacelle} + \vec{P}_{air\ chaud}$

où $\vec{P}_{air\ chaud} = \rho_{chaud} V_{ballon}\,\vec{g}$

Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho_{froid} V_{ballon}\,\vec{g}$

(en négligeant $V_{nacelle}$ devant V_{ballon})

Forces de frottement : négligeable juste au moment du décollage ($v \approx 0$)

Au décollage : LFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{F}$

où F : force ascensionnelle

$m\vec{a} = m_{nacelle}\vec{g} + \rho_{chaud} V_{ballon}\vec{g} - \rho_{froid} V_{ballon}\vec{g}$

$m\vec{a} = \vec{g}\,[m_{nacelle} + V_{ballon}(\rho_{chaud} - \rho_{froid})]$

Condition de décollage :

Il faut $\vec{a}$ en sens inverse de $\vec{g}$

$$\Rightarrow \boxed{m_{nacelle} + V_{ballon}(\rho_{chaud} - \rho_{froid}) < 0}$$

II Quantités de mouvement

1.) Définition

a) Quantité de mouvement du point M(m) par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$: $\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\vec{v}(M/\mathcal{R})$ $\|\vec{p}\|$ en $kg.m.s^{-1}$

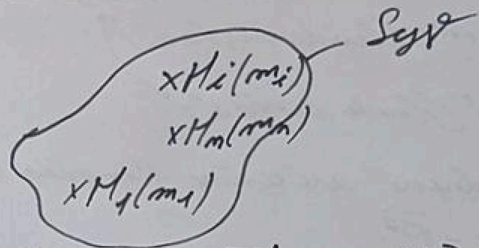
m : masse inerte

Expérimentalement : La masse inerte se confond avec la masse gravitationnelle. (ds la force d'interaction gravitationnelle).

b) Quantité de mouvement d'un système de points $Syst = \{M_i\ (m_i)\}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$:

Déf : $\vec{p}(Syst/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{p}(M_i/\mathcal{R})$

Prop : $\vec{p}(Syst/\mathcal{R}) = m\vec{v}(G/\mathcal{R})$ pour un système de masse constante



$\vec{p}(Syst/\mathcal{R}) = \sum_i m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R})$

Déf : Centre d'inertie du système G (ou centre de masse)

$\boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$

$\Rightarrow \sum_i m_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \sum_i (m_i) \overrightarrow{OG} = \sum_i (m_i \overrightarrow{OM_i})$

$\boxed{m = \sum_i m_i}$ masse totale du système

$\Rightarrow m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i (m_i \overrightarrow{OM_i})}{m}}$

O fixe ; origine du repère lié à $\mathcal{R}$

$\Rightarrow \vec{v}(G/\mathcal{R}) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\Big)_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i (m_i \overrightarrow{OM_i})}{m}\right)$

m_i cte $\forall i$ et $m = \sum m_i$ constante (si le syst est fermé)

$\Rightarrow \vec{v}(G/\mathcal{R}) = \frac{\sum_i \left(m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}\Big)_{\mathcal{R}}\right)}{m}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \frac{\sum_i (m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R}))}{m}}$

d'où $\boxed{\vec{p}(Syst/\mathcal{R}) = m\vec{v}(G/\mathcal{R})}$

2.) Principe d'inertie (ou première loi de Newton) et référentiels

Principe d'inertie (ou première loi de Newton)

> Il existe au moins un référentiel privilégié appelé référentiel inertiel ou galiléen dans lequel le mouvement de tout point isolé est rectiligne et uniforme.

Point isolé : Soumis à aucune interaction — Valable pour tout corps

Mvt rectiligne uniforme : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{cte} \Rightarrow \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$

Corps : $\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{cte} \Rightarrow \vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{0}$

Propriété :

> L'ensemble des référentiels galiléens est constitué de tous les référentiels en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

En effet, si $\mathcal{R}$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$, un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_0$ est aussi rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$.

Référentiel de Copernic $\Re_c(C, \vec{e}_{xC}, \vec{e}_{yC}, \vec{e}_{zC})$
- origine : centre d'inertie du système solaire
- axes : direction de trois étoiles fixes de notre galaxie

Meilleur référentiel galiléen mis en évidence expérimentalement

Référentiel héliocentrique $\Re_H(S, \vec{e}_{xH}, \vec{e}_{yH}, \vec{e}_{zH})$
- origine : centre d'inertie du soleil
- axes : direction de trois étoiles fixes de notre galaxie

Décalé de $\overrightarrow{CS}$ par rapport à $\Re_C$, supposé galiléen avec une excellente approximation.

Référentiel géocentrique $\Re_O(O, \vec{e}_{xO}, \vec{e}_{yO}, \vec{e}_{zO})$
- origine : centre d'inertie de la terre
- axes : directions de trois étoiles fixes de notre galaxie

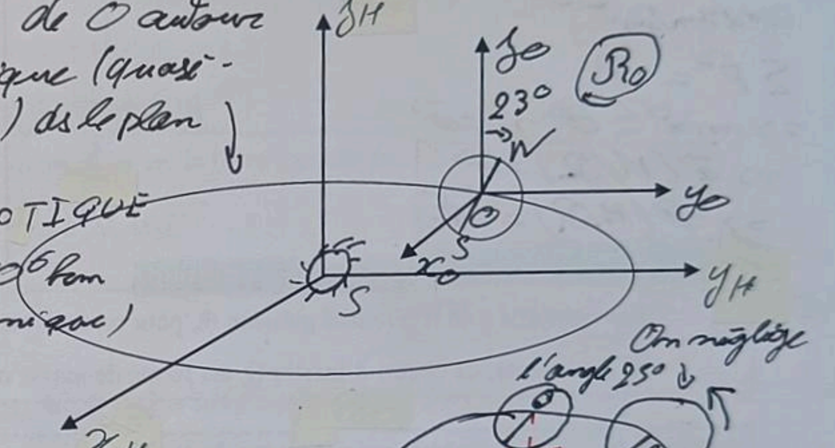
Mouvement de translation elliptique de $\Re_0/\Re_H$ de période 365,25 jours solaires.

$\Re_O$ est supposé galiléen pour des durée petites devant 1 an & des masses pas trop grandes.

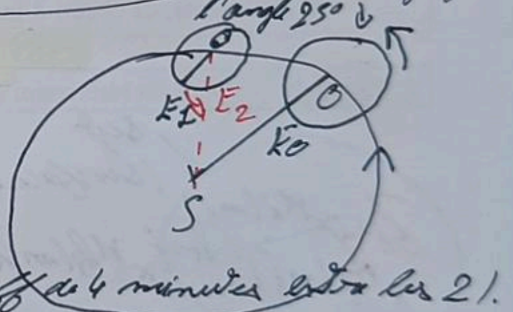
trajectoire de O autour de S elliptique (quasi-circulaire) ds le plan $(Sx_H y_H)$

plan de l'ECLIPTIQUE

$SO = 1UA \simeq 150.10^6$ km (1 unité astronomique)



On néglige l'angle 23°



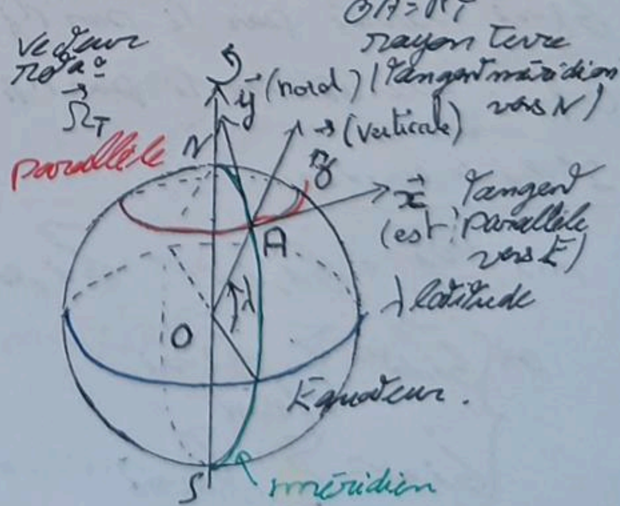
$E_O \longrightarrow E_1$ la terre fait exact^t 1 tour sur elle m$\hat{}$ = 1 jour sidéral

$E_O \to E_2$ 1 jour solaire (diff de 4 minutes entre les 2).

Référentiel terrestre $\Re_T(A, \vec{e}_{xT}, \vec{e}_{yT}, \vec{e}_{zT})$
- origine : un point à la surface de la terre
- axes : directions fixes par rapport à la terre

Mouvement de rotation autour de l'axe des pôles de période un jour sidéral et mouvement circulaire du centre d'inertie de la terre O autour du soleil.

$\Re_{OT}$ est supposé galiléen pour des durées courtes devant 1 jour (& des masses pas trop grandes).



3.) Loi de la quantité de mouvement (ou deuxième loi de Newton)

a) Pour un point matériel M(m)

Par rapport à tout référentiel galiléen $\mathcal{R}$, le mouvement d'un point matériel M de masse (inerte) m vérifie la relation : $\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt} = \sum \vec{F}$ appliquées au point M

Si m est constante, $m\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \sum \vec{F}$ appliquées au point M

Démo : $\frac{d(m\vec{v}(M/\mathcal{R}))}{dt} = m\frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt}$

$= m\vec{a}(M/\mathcal{R})$

=> si m est cste

Rq : Point isolé : aucune interaction

ou pseudo-isolé : les interactions se compensent

$\sum \vec{F} = \vec{0}$

=> $m\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$

=> $\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}}$

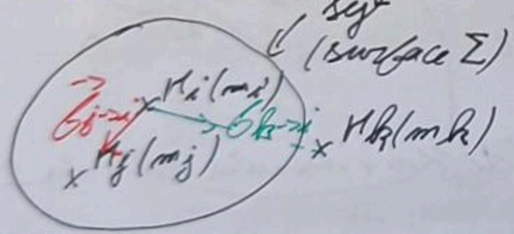
=> $\boxed{\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{cste}}$

b) Pour un système de points matériels S= {M_i (m_i)}

Par rapport à tout référentiel galiléen $\mathcal{R}$, pour un système, $\frac{d\vec{p}(Syst/\mathcal{R})}{dt} = \sum \vec{F}\,ext$

Si le système, de centre d'inertie G, est fermé de masse m constante, $\frac{d\vec{p}(G/\mathcal{R})}{dt} = m\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \sum \vec{F}\,ext$

Propriété : Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé se conserve.



$\vec{f}_{j\to i}$ exercée sur M_i par $M_j \in$ Syst

$\vec{f}_{k\to i}$ exercée sur M_i par $M_k \notin$ Syst

2e loi de Newton :

$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_{i,int} + \vec{f}_{i,ext}$

où $\begin{cases} \vec{f}_{i,int} = \sum\limits_{j\neq i,\ M_j\in Syst} \vec{f}_{j\to i} \\ \vec{f}_{i,ext} = \sum\limits_{k\neq i,\ M_k\notin Syst} \vec{f}_{k\to i} \end{cases}$

Pour le système complet :

$\sum_i m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{f}_{i,int} + \sum_i \vec{f}_{i,ext}$

$\sum_i m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext}$

=> où $\vec{F}_{int} = \sum_i \vec{f}_{i,int}$ où $\vec{f}_{i,int} = \sum\limits_{j\neq i,\ M_j\in syst} \vec{f}_{j\to i}$

Principe d'interac° : $\vec{f}_{j\to i} = -\vec{f}_{i\to j}$

Les forces à l'intérieur du système se compensent 2 à 2 => $\boxed{\vec{F}_{int} = \vec{0}}$

$\vec{p}(syst/\mathcal{R}) = \sum_i (m_i\vec{v}_i) = m\vec{v}_G$

pour un système de masse cste

=> $\frac{d\vec{p}(syst/\mathcal{R})}{dt} = \sum_i m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}$

$= m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = m\vec{a}_G$

Pour un syst de masse cste :

$\boxed{m\vec{a}_G = \vec{F}_{ext}}$

Résultante des actions extérieures

Rq : Système isolé (ou pseudo isolé) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{p}(syst/R)}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}(syst/R) = \vec{cste}}$$

Système de masse cste : $\vec{a}(G/R) = \vec{0}$

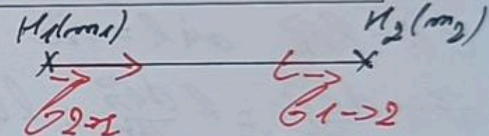
$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(G/R) = \vec{cste}}$$

4.) Principe des actions réciproques (ou troisième loi de Newton).

Soient M_1 et M_2 deux points matériels en interaction. $\vec{f}_{1\to2}$ est la force exercée par M_1 sur M_2 et $\vec{f}_{2\to1}$ la force exercée par M_2 sur M_1.

Les forces d'interaction sont opposées et colinéaires à (M_1M_2).

$\boxed{\vec{f}_{2\to1} = -\vec{f}_{1\to2} \text{ et } \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{f}_{1\to2} = \vec{0}}$



⚠ Valables { pour tous corps en interac° ; à la fois pour des forces de contact et à distance

ex : Interactions gravitationnelles

ex : Syst : $\{M_1, M_2\}$ (M_1 et M_2 en interac°, pas d'autres interac°)

Réf : galiléen

LFD : pour :

M_1 : $\frac{d\vec{p_1}}{dt} = \vec{f}_{2\to1}$ (1)

M_2 : $\frac{d\vec{p_2}}{dt} = \vec{f}_{1\to2}$ (2)

(1)+(2) : $\frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} = \vec{f}_{2\to1} + \vec{f}_{1\to2} = \vec{0}$ d'après le principe d'interac°.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p_1} + \vec{p_2}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{cste}}$

$\Rightarrow \boxed{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = \vec{cste}}$ — déterminée par les CI : $\vec{P}_{syst}$ se conserve pour un syst isolé

III Applications

1.) Méthode de résolution d'un problème de mécanique

1. Définir le système étudié.
   Définir le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement. Est-il galiléen ? Oui

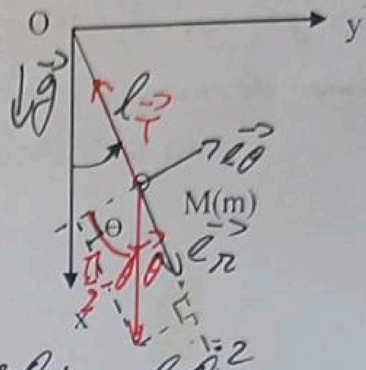
2. Bilan des forces appliquées (à distance, contact, tension, rappel)

3. Application des théorèmes généraux LFD, Th de l'Ec ; Th de l'Em.

4. Choix d'un repère de projection et projection dans ce repère.

5. Intégration des équations avec prise en compte des conditions initiales sur la position et la vitesse.

2.) Pendule simple



Syst : {bille M(m)} au bout d'un fil de masse négligeable et inextensible fixé en O.
Réf : terrestre supposé galiléen.

Forces : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e_x}$; $\vec{T}$ tension exercée par le fil (si le fil est tendu).

LFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

CI : On lâche la bille d'un angle θ_0, ss vitesse initiale.

=> mvt circulaire ; coordonnées cylindriques (polaires ds 1 plan)

$\vec{e_r}$: vecteur unitaire de $\vec{OM}$ ($\vec{e_R} \rightarrow \vec{e_R}$)

$\vec{e_\theta}$: rotation de $+\frac{\pi}{2}$ / $\vec{e_r}$ ds le sens de $\theta \nearrow$

$\boxed{\triangle\ \theta > 0 \text{ sur le dessin}}$

$\vec{OM} = l\vec{e_r}$ où l = cste

$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = l\frac{d\vec{e_r}}{dt} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = l\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

$\vec{P} = mg\vec{e_x} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\vec{e_\theta}$

$= mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$

$\Rightarrow ml(\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \dot{\theta}^2\vec{e_r}) = mg(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}) - T\vec{e_r}$

$/\vec{e_r}$: $-ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$

$/\vec{e_\theta}$: $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$$\begin{cases} T = +mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Pour θ très petit $\theta \approx \sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$ Oscillateur harmonique

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\Rightarrow \theta(t) = K\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

CI à t=0 $\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 \\ v(t=0) = 0 \end{cases}$

Or $v = l\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}(t=0) = 0$

$\theta(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = \theta_0$

$\Rightarrow A = \theta_0$

$\dot{\theta}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$\dot{\theta}(0) = -A\omega_0\sin 0 + B\omega_0\cos 0 = 0$

$\Rightarrow B = 0$

$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$

Période des oscillations $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

T_0 est indépendante des CI

=> Isochronisme des petites oscillations

T dépend de θ_0 : T ↗ qd θ_0 ↗

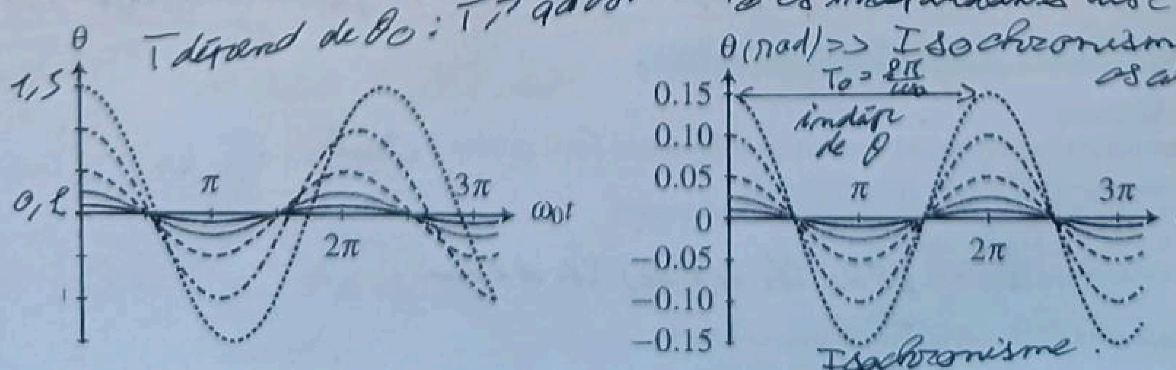


Figure 15.18 – Évolution temporelle de l'angle θ pour différentes conditions initiales. À gauche, l'amplitude des oscillations est comprise entre 0,1 et 1,5 rad ; à droite, elle est comprise entre 0,01 et 0,15 rad.

$\dot\theta = -\theta_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$

$\Rightarrow \boxed{\|\vec T\| = mg\cos\theta + ml\theta_0^2\omega_0\sin^2(\omega_0 t)}$

Rq importante : En présence de frott^t fluides $\vec F_f = -\alpha \vec v$, $\alpha > 0$.

$\vec v = l\dot\theta \vec e_\theta \Rightarrow \boxed{\vec F_f = -\alpha l\dot\theta \vec e_\theta}$

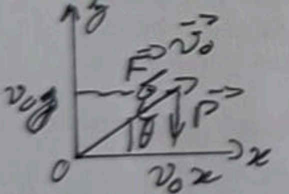
(1) est inchangée (sur $\vec e_r$)

(2) → (2) sur $\vec e_\theta$: $ml\ddot\theta = -\alpha l\dot\theta - mg\sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{\alpha}{m}\dot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

Hyp : θ petit $\boxed{\ddot\theta + \frac{\alpha}{m}\dot\theta + \frac{g}{l}\theta \approx 0}$ (OSEL)

~~α ≠ ...~~ 3.) Tir d'un projectile avec frottements dans le champ de pesanteur uniforme



$\vec F_f$ force de frottement fluide : $\boxed{\vec F_f = -\alpha\vec v}$ $\alpha > 0$

Système : {M(m), point matériel} ; Réf : terrestre supposé galiléen.

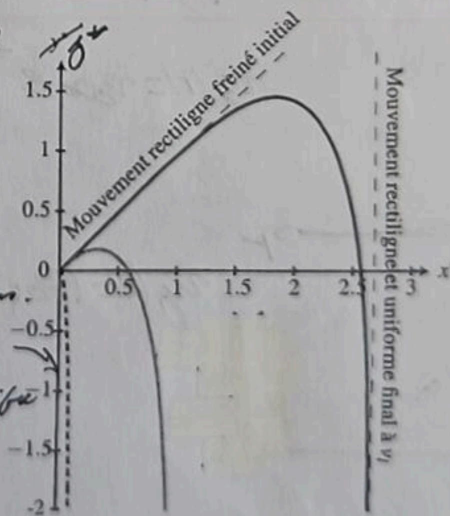
Forces : $\vec P = m\vec g$; $\vec F_f = -\alpha\vec v$

LFD : $\vec P + \vec F_f = m\vec a$

$m\ddot x = 0 - \alpha\dot x \Rightarrow \ddot x + \frac{\alpha}{m}\dot x = 0$ (1)

$m\ddot y = 0 - \alpha\dot y \Rightarrow \ddot y + \frac{\alpha}{m}\dot y = 0$ (2)

$m\ddot z = -mg - \alpha\dot z \Rightarrow \ddot z + \frac{\alpha}{m}\dot z = -g$ (3)



petite vitesse ⇒ chute libre

Figure 15.15 – Évolution de la trajectoire pour différentes vitesses initiales. L'angle de tir est fixé à 45° et la vitesse initiale prend les valeurs de 0, 1v_l (tirets), v_l (trait continu gris) et 10v_l (trait continu noir).

(1) ⇒ $\frac{dv_x}{dt} + \frac{\alpha}{m}v_x = 0$

(2) ⇒ $\frac{dv_y}{dt} + \frac{\alpha}{m}v_y = 0$

(3) ⇒ $\frac{dv_z}{dt} + \frac{\alpha}{m}v_z = -g$

(1) ⇒ $v_x(t) = Ae^{-t/\tau}$ où $\tau = \frac{m}{\alpha} \Rightarrow v_x(t) = Ae^{-\frac{\alpha t}{m}}$

Or $v_x(t=0) = v_{0x} = A \Rightarrow \boxed{v_x(t) = v_{0x}e^{-\frac{\alpha t}{m}}}$

(2) ⇒ $v_y(t) = 0$ car $v_y(t=0) = 0$

(3) ⇒ $v_z(t)_\ell = Ce^{-\frac{\alpha t}{m}}$; $v_z(t)_p = -\frac{gm}{\alpha}$

⇒ $v_z(t) = C\,e^{-\frac{\alpha t}{m}} - \frac{gm}{\alpha}$ à $t=0$ $v_z(0) = C - \frac{gm}{\alpha} = v_{0z} \Rightarrow C = v_{0z} + \frac{gm}{\alpha}$

$x(t) = \int_0^t v_x(t) = -\frac{m}{\alpha} v_{0x} e^{-\frac{\alpha t}{m}} + \frac{m v_{0x}}{\alpha}$

$\boxed{x(t) = \frac{m v_{0x}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)}$

$\boxed{y(t) = \int_0^t v_y(t) = \int_0^t 0 = cste = 0 \text{ ; car } y(0) = 0}$

$\cancel{z(t) = \int_0^t v_z(t) = \left[-\frac{m v_{0z}}{\alpha} e^{-\frac{\alpha t}{m}} - \frac{g m t}{\alpha}\right]_0^t}$

$\cancel{= -\frac{m v_{0z}}{\alpha} e^{-\frac{\alpha t}{m}} - \frac{g m t}{\alpha} + \frac{m v_{0z}}{\alpha}}$

$\cancel{\boxed{z(t) = \frac{m v_{0z}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) - \frac{g m}{\alpha} t}}$

$\cancel{\text{car } z(t=0) = 0}$

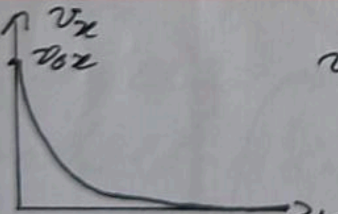
$\Rightarrow \boxed{v_z(t) = \left(v_{0z} + \frac{g m}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha t}{m}} - \frac{g m}{\alpha}}$

$z(t) = -\frac{m}{\alpha}\left(v_{0z} + \frac{g m}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha t}{m}} - \frac{g m}{\alpha} t + cste_2$

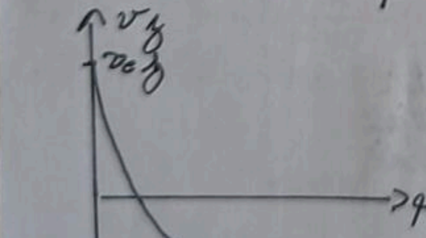
$\Rightarrow z(0) = 0 = -\frac{m}{\alpha}\left(v_{0z} + \frac{g m}{\alpha}\right) + cste_2$

$\Rightarrow cste_2 = \frac{m}{\alpha}\left(v_{0z} + \frac{g m}{\alpha}\right)$

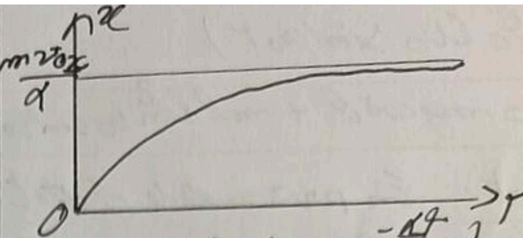
$\Rightarrow \boxed{z(t) = \frac{m}{\alpha}\left(v_{0z} + \frac{g m}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) - \frac{g m}{\alpha} t}$



$v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{\alpha t}{m}}$

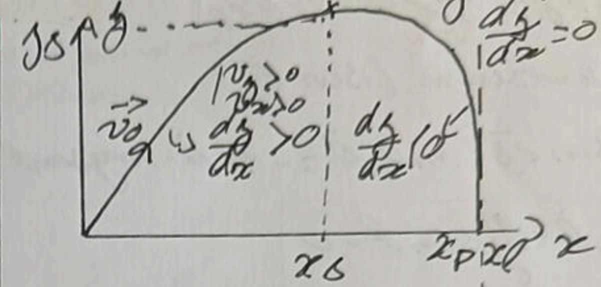


$v_z(t) = \left(v_{0z} + \frac{g m}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha t}{m}} - \frac{g m}{\alpha}$



$x(t) = \frac{m v_{0x}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)$

Sommet : $v_z = 0$, $v_x \neq 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$



Sommet t_S : $v_z = 0$

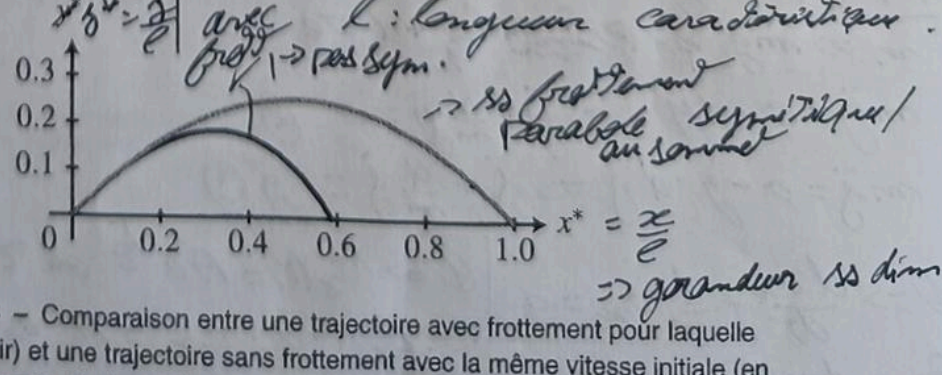
$v_z(t_S) = \left(v_{0z} + \frac{m g}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha t}{m}} - \frac{m g}{\alpha} = 0$

$\Rightarrow t_S$ à déterminer.

- Portée : x_P à déterminer numériquement (pour $z = 0$)
- $t \to +\infty$: $\begin{cases} x \to x_l = -\frac{m v_0}{\alpha} \\ z \to -\infty \\ v_x \to 0 \\ v_z \to -\frac{m g}{\alpha} \end{cases}$

$\Rightarrow$ asymptote verticale

Rq : $\alpha \to 0$ on doit retrouver le tir sans frottement.



$x^* = \frac{x}{l}$ $\Rightarrow$ grandeur ss dim.

Figure 15.16 – Comparaison entre une trajectoire avec frottement pour laquelle $v_0 = v_l$ (en noir) et une trajectoire sans frottement avec la même vitesse initiale (en gris). Les frottements diminuent la portée sans changer fondamentalement la forme de la trajectoire. L'angle de tir est de 45° par rapport à l'horizontale.

IV Scripts python : Chute d'une bille, tir de projectile.

1.) Chute d'une bille avec frottements en $-\alpha v$. Ecriture d'une équation adimensionnée

Bille de vitesse initiale nulle, dans le référentiel terrestre galiléen

LFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_f}$

Proj sur (Oz) : $m\ddot{z} = mg - \alpha\dot{z}$ $v = \dot{z}$

$\Rightarrow \frac{dv_z}{dt} + \frac{\alpha}{m} v_z = g$

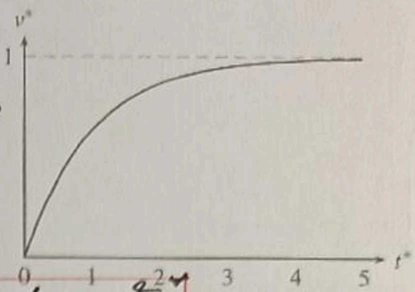
v limite atteinte $\Rightarrow$ tq $\frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_l = \frac{mg}{\alpha}$

$[\frac{\alpha}{m}] = T^{-1}$ $\frac{\alpha}{m} = \frac{1}{\tau}$

$\Rightarrow \frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = g \Rightarrow \boxed{\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_l}{\tau}}$

$\Rightarrow v_z = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_l$

$v_z(0) = 0 \Rightarrow \boxed{v_z(t) = v_l\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}$



$\Rightarrow \boxed{v^* = \frac{v_z}{v_l} = 1 - e^{-t^*}}$

où $\boxed{t^* = \frac{t}{\tau}}$ τ constante de temps ou temps de relaxation

2.) Chute d'une bille avec frottements en $-kv^2$. Résolution par la méthode d'Euler

LFD : $m\vec{a} = m\vec{g} - kv\vec{v}$

Sur (Oz) : $\ddot{z} = g - \frac{k}{m} v_z^2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dv_z}{dt} = g - \frac{k}{m} v_z^2}$

à résoudre avec Euler.

$a = \frac{dv_z}{dt} = \frac{v_z(t_k + h) - v_z(t_k)}{h}$

où $h = t_{k+1} - t_k$ $\Rightarrow \frac{v_{k+1} - v_k}{h} = g - \frac{k}{m} v_k^2$

$\boxed{a = \frac{v_{k+1} - v_k}{h}}$

$\Rightarrow \boxed{v_{k+1} = v_k + h\left[g - \frac{k}{m} v_k^2\right]}$

```
#MC2 chute d'une bille. methode d'Euler. Permet d'obtenir les courbes données au TD MC2 exo 1
#Chute libre d'une bille avec résistance de l'air en -kv**2
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def ordre1_euler(k,V0, tmax, n):
    h=tmax/n
    t=0
    v=V0
    les_t=[t]
    les_v=[v]
    for i in range(n):
        v=v+h*[g-((k/m)*v**2)]
        t=t+h
        les_v.append(v)
        les_t.append(t)
    return(les_t, les_v)
##Tracé de la solution de la méthode d'Euler
g=9.81#m.s-2
m=1 #kg
tau=1
tmax=50*tau
V0=0 #vitesse initiale
```

Rq : Vitesse limite tq $\frac{dv}{dt} = 0$

Or $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2 = 0$

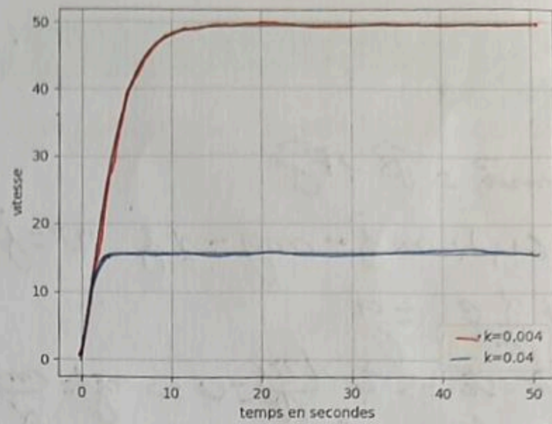
$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{mg}{k}} = v_{limite}}$

$v \xrightarrow[t \to +\infty]{} v_{limite} = v_f$ (Sol forcée)

$v_{libre} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

```
n = 100 #MODIFIER LE NOMBRE DE POINTS
k = 0.004#kg/m-1
les_t, les_v = ordre1_euler( k,V0, tmax, n)
plt.plot(les_t, les_v, color='b',label='k=0.004')
k = 0.04#kg/m-1
les_t, les_v = ordre1_euler( k, V0,tmax, n)
plt.plot(les_t, les_v, color='g',label='k=0.04')

plt.xlabel('temps en secondes')
plt.ylabel('vitesse')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



3.) Tir de projectile avec frottements en $-kv^2$:

On résout avec odeint : "MC2. boulet"

HORS Programme

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.integrate as spi

#Parametres
m=8 # kg
rho = 1.2 # kg/m**3 , air
Cx= .2 # sphere
S = 0.3 # m^2
g= 9.80 # m/s**2

# conditions initiales
theta0 = np.pi/4
v0 =100 # m/s
etat_initial = [x0,y0,vx0,vy0] = [0,0,v0*np.cos(theta0),v0*np.sin(theta0)]
#equadiff
def equadiff(etat,t):
        x,y,vx,vy = etat
        v2 = vx*vx + vy*vy
        theta = np.arctan2(vy,vx)
        F= 1/2 * rho * S * Cx * v2##force de frottement fluide
        Fx = -F* np.cos(theta)
        Fy = -F* np.sin(theta)
        ax= Fx/m
        ay= Fy/m - g
        derivee_de_l_etat = vx,vy,ax,ay
        return derivee_de_l_etat
tmax = 30 # > 2vo/g
t=np.linspace(0,tmax,1000) # instants de simulation

plt.close("all")
for theta in range(0,95,5):
        theta0 = theta * np.pi / 180
        etat_initial = [x0,y0,vx0,vy0] = [0,0,v0*np.cos(theta0),v0*np.sin(theta0)]
        x,y,vx,vy = spi.odeint(equadiff,etat_initial,t).T#☼le .T permet de remplir les 4 listes
        air = y>=0
        #print(theta,t[air.argmin()])
        plt.plot(x[air],y[air],label = str(theta)+"°") #pour ne tracer que les y>0
        #plt.plot(x,y,label = str(theta)+"°") #Pour tracer la courbe en entier
plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.legend()
plt.show()
```

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$

$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$

(norme)

/x, /y : projeç de la LFD : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$