# PROGRAMMES 15 et 16.

## PROGRAMME 15 : du 26/01 au 30/01

### Reprise des bijections, images directes et réciproques (tirés en arrière)

### Reprise du début des limites

### Limites et continuité : suite et fin

★ Continuité de $f$ en un point $a$ de $I$. Continuité à droite et à gauche. Prolongement par continuité en un point. Image d'une suite de limite $a$ par une fonction continue en $a$.

Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.

★ Continuité sur un intervalle. Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composée. Théorème des valeurs intermédiaires (forme 1 : $f$ s'annule sur $[a, b]$, forme 2 : tout réel intermédiaire entre des images est atteint). Image d'un intervalle par une fonction continue. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (théorème des bornes atteintes). Toute fonction $f$ continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ réalise une bijection de $I$ dans l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que $f$.

★ Brève extension aux suites complexes : Limite de $f$ en $a$, continuité de $f$ en $a$, continuité de $f$ sur un intervalle $I$. Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire. Fonctions bornées au voisinage de $a$. Toute fonction admettant une limite finie en $a$ est bornée au voisinage de $a$. Opérations sur les fonctions admettant une limite finie en $a$, continues en $a$ ou continues sur un intervalle $I$ : combinaisons linéaires, produit, quotient.

### Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition d'une bijection.
- ❒ Définition d'une image directe, d'un tiré en arrière.
- ❒ Définition mathématique d'une limite.
- ❒ Limite à gauche, à droite en un point.
- ❒ Passage à la limite.
- ❒ Théorème d'encadrement.
- ❒ Limite d'une fonction croissante sur $[a, b[$ (étude en $b$).
- ❒ Écriture mathématique de la continuité en un point.
- ❒ Continuité à droite, à gauche.
- ❒ Prolongement par continuité en un point.
- ❒ Théorème des valeurs intermédiaires (forme 1 et/ou 2).
- ❒ Théorème des bornes atteintes (savoir faire une phrase en français et une traduction mathématique).

# Démonstrations

- ❒ Unicité de la limite (pour le cas limite finie en $a$ réel).
- ❒ Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x) = \ell$ (pour $a, b, \ell$ réels).
- ❒ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$. Alors $f$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$ (forme 1 du théorème des valeurs intermédiaires).

✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷ ✷

## PROGRAMME 16 : du 02/02 au 06/02

# Reprise des limites et de la continuité

# Dérivation

- ★ Dérivabilité en un point $a$, nombre dérivé. Interprétation géométrique.
  Si $f$ est définie en $a$ alors $f$ est dérivable en $a$ ssi $f$ admet un $DL_1$ en a.
  Ce $DL_1$ d'écrit : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ soit aussi $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h)$.
  La dérivabilité entraîne la continuité.
  Savoir interpréter un $DL_1$ de $f$ en un point $a$ où elle n'est pas définie (interprétation en 2 étapes : d'abord prolongement par continuité en $a$ puis dérivabilité de la fonction prolongée en $a$).
  Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.
- ★ Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Si $f$ est une bijection de l'intervalle $I$ sur l'intervalle $J$, si $f$ est dérivable en $a$, condition nécessaire et suffisante de dérivabilité de $f^{-1}$ en $b = f(a)$ et calcul de la dérivée.
- ★ Dérivées successives. Pour $k$ dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, fonction de classe $C^k$ sur $I$. Opérations sur les fonctions de classe $C^k$ : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composée, réciproque.
- ★ Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur. Définition d'un point critique.
- ★ Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis.
  Inégalité des accroissements finis : si $f$ est dérivable sur $I$ et si $|f'|$ est bornée par $M$ sur $I$, alors, pour tout $(x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$. Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Caractérisation des fonctions constantes, croissantes.
  Si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$, $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ et $f'$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors $f$ est strictement croissante sur $I$ (à adapter pour la stricte décroissance).
- ★ Théorème de la limite de la dérivée : si $f$ est dérivable sur $I \setminus \{a\}$, continue sur $I$ et si $f'(x)$ tend vers $\ell$ (réel) lorsque $x$ tend vers $a$, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. Ainsi, $f$ est dérivable en $a$, $f'(a) = \ell$ et $f'$ est continue en $a$.
  Cas où $f'(x)$ tend vers $\pm\infty$ en $a$.
- ★ Brève extension à $\mathbb{C}$.

# Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition mathématique d'une limite.
- ❒ Limite à gauche, à droite en un point.
- ❒ Passage à la limite.
- ❒ Théorème d'encadrement.
- ❒ Limite d'une fonction croissante sur $[a, b[$ (étude en $b$).
- ❒ Écriture mathématique de la continuité en un point.
- ❒ Continuité à droite, à gauche.
- ❒ Prolongement par continuité en un point.
- ❒ Théorème des valeurs intermédiaires (forme 1 et/ou 2).
- ❒ Théorème des bornes atteintes (savoir faire une phrase en français et une traduction mathématique).
- ❒ Définition de la dérivabilité en un point.
- ❒ Dérivabilité à droite, à gauche en un point.
- ❒ Définition des dérivées successives d'une fonction.
- ❒ Formule de Leibniz.
- ❒ Définition d'un extremum local.
- ❒ Résultat sur les extrema d'une fonction dérivable.
- ❒ Théorème de Rolle.
- ❒ Égalité des accroissements finis.
- ❒ Inégalité des accroissements finis.
- ❒ Monotonie des applications dérivables.
- ❒ Théorème de la limite de la dérivée.

# Démonstrations

- ❒ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$. Alors $f$ s'annule au moins une fois sur $[a, b]$ (forme 1 du théorème des valeurs intermédiaires).
- ❒ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. $f$ est croissante sur $I$ ssi pour tout $x \in I, f'(x) \geqslant 0$.
- ❒ **Exercice fait en cours :**

  Soit $f : \begin{array}{rcl} ]0, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - 1}{x} \end{array}$.

  a) Montrer que $f$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

  b) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$.