

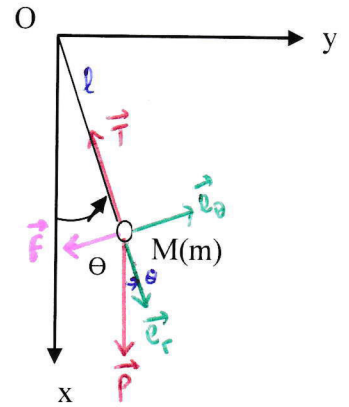
6.) Exemple : Pendule simple

Syst $\{M(m)\}$

Ref R_T galiléen

Forces

- $\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$
- $\vec{T} = -T \vec{e}_r$



Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2$

Energie potentielle : $-dE_p = \delta W$

tension : $\vec{T} \cdot d\vec{l} = 0$

peids : $-dE_p = \delta W$

$$= mg \vec{e}_x \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y)$$

$$= mg dx$$

$$= d(mgx)$$

$$E_p = -mgx + \text{cte}$$

$$= -mgl \cos \theta + \text{cte}$$

Loi : La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives ou ne travaillant pas, son énergie mécanique est cste.

$$E_m = E_c + E_p$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta + \text{cte}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m l^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m l \dot{\theta} = 0 = m v \rightarrow \text{or, il y a mv} \text{ donc} \\ l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \end{cases} \text{ non acceptable}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

cas de petits angles : $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

solution générale : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales

$$\text{à } t=0, \theta=0 \text{ et } v=v_0 = l \dot{\theta}_0$$

$$\theta(0) = A = 0$$

$$\dot{\theta}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{\theta}(0) = B \omega_0 = \frac{v_0}{l}$$

$$\Rightarrow B = \frac{v_0}{l \omega_0}$$

$$\theta(t) = \frac{v_0}{l \omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

En présence de frottements fluides.

$$\vec{F} = -\alpha \vec{v}, \alpha > 0$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W_{mc}}{dt} = P_{mc} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta = -\alpha v^2 = -\alpha l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} \neq 0, \text{ car il y a mv}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

IV Mouvements conservatifs à une dimension

1.) Puits et barrière de potentiel

La conservation de l'énergie mécanique suffit à la mise en équation d'un mouvement ne possédant qu'un seul degré de liberté (c'est-à-dire décrit par une seule coordonnée).

Exemple : Point $M(m)$ se déplaçant sans frottements selon un axe (Ox) horizontal, soumis à une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$, dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$.

Syst $\{M(m)\}$, Ref R_T galiléen

Forces

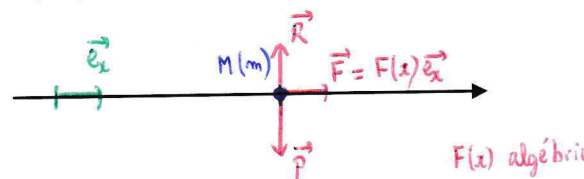
- $\vec{P} + \vec{R} = 0$
- $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$

si $\vec{F}$ est une force conservative,

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = \delta W = -dE_p = F(x)dx$$

il existe donc $E_p(x)$

Clé : l'énergie mécanique est cste



$$E_m = E_c + E_p = \text{cste}$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2}{m} [E_m - E_p(x)] \geq 0$$

le mvt n'est donc possible que si $E_m \geq E_p$

- Puits de potentiel : La particule est confinée dans la région $[x_1, x_2]$

$$\vec{F} = k(l-l_0)\vec{e}_x$$

$$E_p = \frac{k}{2}(l-l_0)^2 + \text{cste}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} l = x \\ l_0 = x_0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + \text{cste}$$

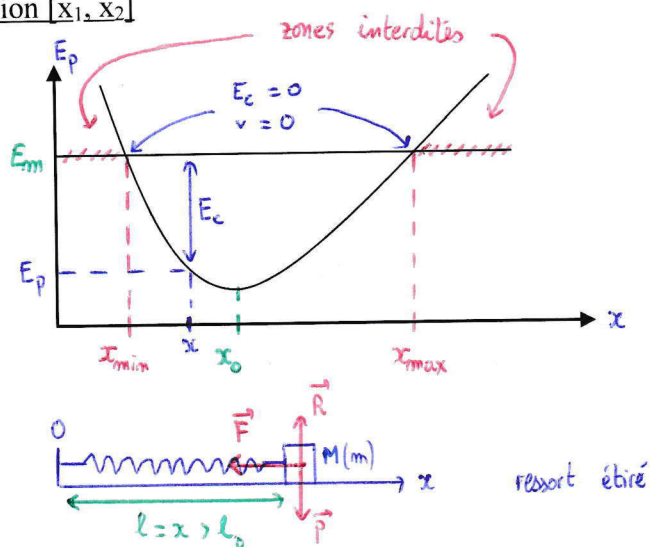
on a $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ énergie cinétique

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + \text{cste} = K$$

à $t=0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $x = x_0$, on connaît E_m

on a $E_m \geq E_p \Rightarrow x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$

$\Rightarrow$ on a un état lié



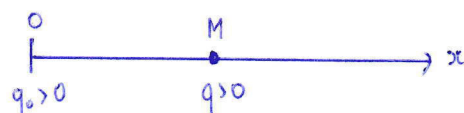
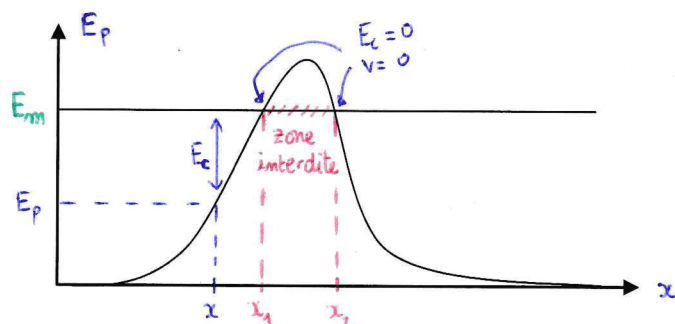
- Barrière de potentiel : La particule ne peut pas pénétrer dans la région $[x_1, x_2]$

CI on a $E_m = E_{co} + E_{po}$

$$E_m \geq E_p$$

$$x \in]-\infty, x_1] \quad \text{ou} \quad x \in [x_2, +\infty[$$

$\Rightarrow$ état de diffusion



entre O et M : force répulsive

2.) Condition d'équilibre et de stabilité

*** Définition : Un point M est en équilibre dans un référentiel si sa vitesse est nulle à tout instant.

$$\text{Equilibre} : v=0 \quad \forall t \text{ dans } \mathcal{R}$$

$$\text{si } \vec{v} = \vec{0}, \text{ alors } \vec{a} = \vec{0}$$

$$\text{LFD} \quad m\vec{a} = \Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{si } \Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{LFD} \quad m\vec{a} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \text{cste}$$

il suffit de prendre $\vec{v}_0 = \vec{0}$

*** **Propriété :** M(m) est en équilibre dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen si la résultante des forces $\vec{F}$ est nulle à tout instant et si la vitesse initiale est nulle.

Définitions :

- Un point M est en équilibre stable si la force qui apparaît lorsqu'on l'écarte infiniment peu de sa position d'équilibre tend à l'y ramener.
- Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.
- Si aucune force n'apparaît, l'équilibre est dit indifférent. Le point reste dans sa nouvelle position.

Exemple : Charriot glissant sans frottements sur des montagnes russes.

Syst $\{M(m)\}$, Ref $\mathcal{R}_T$ galiléen

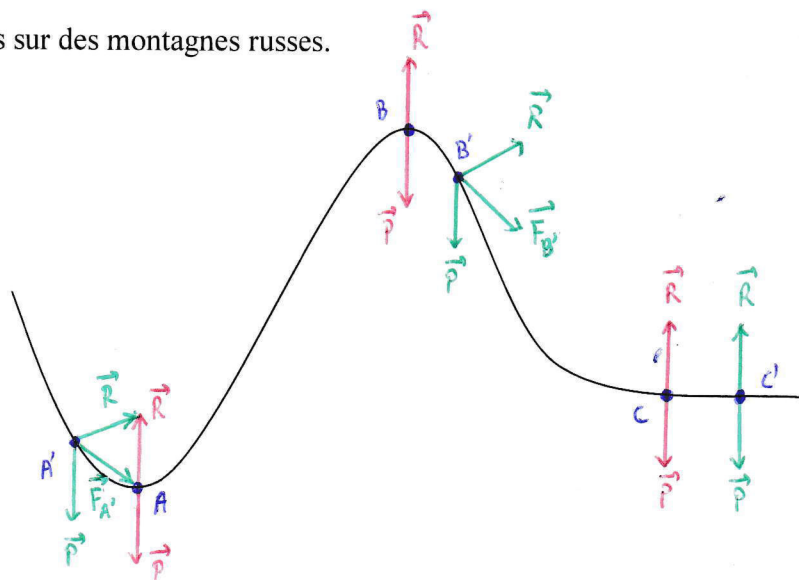
- Forces
- $\vec{P}$ poids
 - $\vec{R}$ réaction normale

$$\text{En } A, B, C, \quad \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

$\vec{F}_A$ en A' tend à ramener M en A
donc A position d'équilibre stable

$\vec{F}_B$ en B' tend à éloigner M de B
donc B position d'équilibre instable

C position d'équilibre indifférent



3.) Cas particulier

Hypothèse : Point M soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ conservative, dérivant d'une énergie potentielle $Ep(x)$, se déplaçant suivant un axe (Ox), $\vec{F}$ étant la seule force qui travaille.

Propriété : Si un point E d'abscisse $x = x_e$ est une position d'équilibre, alors

l'énergie potentielle Ep est extrémale en ce point : $\left(\frac{dEp}{dx}\right)(x = x_e) = 0$

L'équilibre est stable si Ep est minimale : $\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) > 0$

L'équilibre est instable si Ep est maximale : $\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) < 0$

L'équilibre est indifférent si $\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) = 0$

Equilibre stable : minimum local de Ep

x	x_e
Ep	$Ep(x_e)$
$\frac{dEp}{dx}$	- 0 +
$\frac{d^2Ep}{dx^2}$	+

Equilibre instable : maximum local de Ep

x	x_e
Ep	$Ep(x_e)$
$\frac{dEp}{dx}$	+ 0 -
$\frac{d^2Ep}{dx^2}$	-

Démonstration

$$\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z)$$

$\vec{F}$ est une force conservative

$$\delta W = -dEp \Rightarrow \frac{dEp}{dx} = -F(x)$$

Position d'équilibre dans R galiléen

on a l'équilibre si $F(x) = 0$ avec $v = 0$

$$\Rightarrow \text{équilibre : } \left(\frac{dEp}{dx}\right)(x = x_e) = 0$$

on a un extremum d'énergie potentielle

Stabilité

on écarte M de x_e

$$\text{on a } \frac{dF}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_e} \frac{F(x) - F(x_e)}{x - x_e}$$

$$\text{au voisinage de } x_e, \left(\frac{dF}{dx}\right)(x = x_e) = \frac{F(x)}{x - x_e}$$

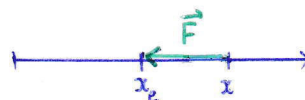
$$F(x) = (x - x_e) \cdot \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_e}$$

$$\text{or, } F = -\frac{dEp}{dx}$$

$$F(x) = -(x - x_e) \left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{x=x_e}$$

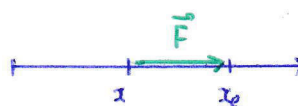
équilibre stable :

$$x > x_e \Rightarrow F(x) < 0$$



$$\Rightarrow \left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) > 0$$

$$x < x_e \Rightarrow F(x) > 0$$



$$\Rightarrow \left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) > 0$$

4.) Définition générale de l'oscillateur harmonique

Définition : On appelle oscillateur harmonique à une dimension tout système à un degré de liberté dont l'équation du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ quelle que soit la nature physique de la variable x .

Propriété : Un oscillateur se comporte comme un oscillateur harmonique pour de petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

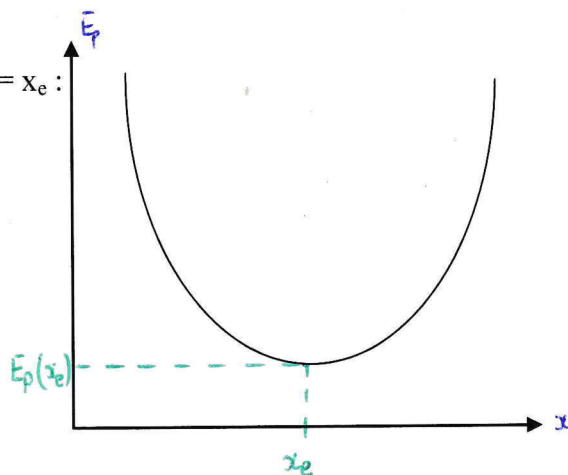
Hypothèse : Oscillateur à une dimension, dont la position est donnée par une seule coordonnée x , soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ conservative, dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$, $\vec{F}$ étant la seule force qui travaille.

Soit x_e correspondant à une position d'équilibre stable du système.

Expression de l'énergie potentielle :

Développement limité de $E_p(x)$ au second ordre, au voisinage de $x = x_e$:

$$E_p(x) \approx E_p(x_e) + (x - x_e) \left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{(x=x_e)} + \frac{(x - x_e)^2}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{(x=x_e)}$$



condition d'équilibre stable

$$\left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x=x_e} = 0$$

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x=x_e} = k > 0$$

$$\Rightarrow E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{k}{2}(x-x_e)^2$$

Dans $\mathcal{R}$ galiléen,

Forces : seulement $F(x)$ conservative

loi l'intégrale 1^{ère} du mvt

$$E_m = E_c + E_p = \text{cte}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{k}{2} (x-x_e)^2$$

$$\text{d'où } \frac{dE_m}{dx} = m \dot{x} \ddot{x} + k \dot{x} (x-x_e) = 0$$

5.) Anneau sur un guide circulaire

Syst $\{M(m)\}$ Ref $\mathcal{R}_T$ galiléen

Forces

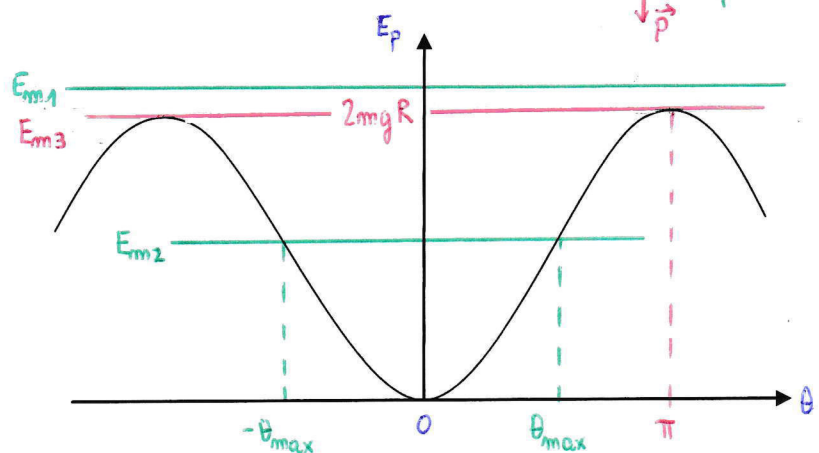
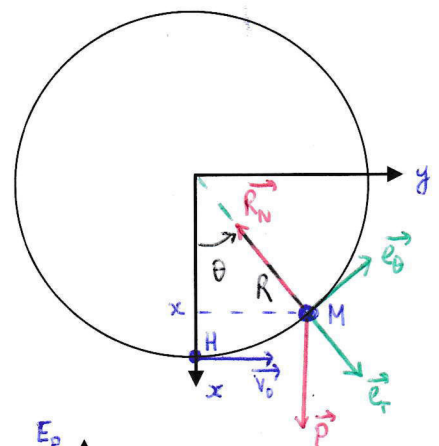
- poids $\vec{P}$
- réaction $\vec{R}_N$

$$\begin{aligned} \text{Energie cinétique } E_c &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 \end{aligned}$$

Energie potentielle :

$\vec{R}_N$ ne travaille pas

$$\begin{aligned} \vec{P} : E_p &= -mgx + \text{cte} \\ &= -mgR \cos \theta + \text{cte} \end{aligned}$$



origine des potentiels en H

$$E_p(H) = 0 = -mgR + cste$$

$$\Rightarrow cste = mgR$$

$$E_p = mgR(1 - \cos\theta)$$

Energie mécanique : $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

$$v^2 = \frac{2}{m}(E_m - E_p) \geq 0$$

Le mv't n'est possible que si $E_m > E_p$

Condition $t=0$: $\theta = 0$

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow E_m(H) = \frac{1}{2}mv_0^2 = E_m$$

car toutes les forces sont conservatives.

1^{er} cas $E_m = E_{m1} > 2mgR$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 > 2mgR$$

$$\Rightarrow v_0 > \sqrt{4gR}$$

$$\forall t, E_m > E_p$$

$$\forall v \neq 0$$

Le point M ne s'arrête jamais

$\Rightarrow$ état de diffusion

2^e cas $E_m = E_{m2} < 2mgR$

$$\Rightarrow v_0 < \sqrt{4gR}$$

Mvt oscillateur, $\theta \in [-\theta_{max}, \theta_{max}]$

$$\text{si } \theta = \pm \theta_{max}, E_c = 0$$

$$\Rightarrow E_{m2} = E_p$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgR(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{max} = 1 - \frac{v_0^2}{2gR}$$

dans la pratique,

13

θ_{max} doit être $\leq \frac{\pi}{2}$ sauf si

on a un anneau lié au cercle

3^e cas $E_m = E_{m3} = 2mgR$

$$\theta_{max} = \pm \pi$$

L'anneau est en équilibre instable.

Equation du mv't.

Loi : Th. de l' E_m

$$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos\theta) = cste$$

$$\frac{dE_m}{dt} = mR^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\begin{cases} mR\dot{\theta} = 0 & \leftarrow \text{non valable car il y a mv't} \\ R\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

si $\theta \ll 1$, petites oscillations : $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0} \quad \text{oscillateur harmonique}$$

Autre méthode pour $\theta \ll 1$

on fait un dl de E_p à l'ordre 2

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgR\sin\theta \quad \left| \quad \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgR\cos\theta$$

$$\left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0 \quad \left|\quad \left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = mgR$$

$$E_p(\theta) \approx E_p(0) + \theta \left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{\theta=0} + \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta=0}$$

$$E_p(\theta) \approx \frac{mgR}{2}\theta^2$$

L'énergie mécanique au voisinage de 0.

$$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{mgR}{2}\theta^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = mR^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgR\dot{\theta}\theta = 0$$

$$mR\dot{\theta} = 0 \quad \text{non valable}$$

$$\Rightarrow R\ddot{\theta} + g\theta = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0}$$

V Gradient d'énergie potentielle. Lien avec une force conservative.

1.) Définitions

Définition : Le gradient de l'énergie potentielle E_p , noté $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$, est le vecteur tel que la variation de E_p lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ s'écrit $dE_p = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{l}$.

Propriété : Si une force conservative dérive d'une énergie potentielle E_p , on a alors : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$

Remarque : Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ est orienté dans le sens où E_p croît le plus rapidement.

Démonstration

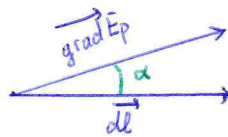
Force conservative : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$

or, $dE_p = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{l}$

$\Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$

Démonstration

$$\begin{aligned} dE_p &= \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{l} \\ &= \|\overrightarrow{\text{grad}} E_p\| \cdot \|d\vec{l}\| \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$



- si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\overrightarrow{\text{grad}} E_p \perp d\vec{l}$
 $dE_p = 0 \Leftrightarrow E_p = \text{cste}$
 $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ est perpendiculaire aux surfaces $tq: E_p = \text{cste}$
- si $\alpha = 0$, $\overrightarrow{\text{grad}} E_p \parallel d\vec{l}$
 $dE_p = \|\overrightarrow{\text{grad}} E_p\| \cdot \|d\vec{l}\| = dE_{p, \max}$
 $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ orienté vers $E_{p, \max}$

En coordonnées cartésiennes, on a $E_p(x, y, z)$

La différentielle de E_p est la variation élémentaire de E_p associée à un déplacement élémentaire du point M :

$$dE_p = E_p(x+dx, y+dy, z+dz) - E_p(x, y, z) \quad dE_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)_{x,y} dz$$

$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_{y,z}$: dérivée partielle de E_p par rapport à x (avec y et z cste)

En coordonnées cartésiennes, $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$

donc $\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_{x,z} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)_{x,y} \vec{e}_z$

$$dE_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)_{x,y} dz$$

$$dE_p = \overrightarrow{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{l} = \underbrace{(\overrightarrow{\text{grad}} E_p)_x}_{\text{composante de } \overrightarrow{\text{grad}} E_p \text{ sur } x} dx + (\overrightarrow{\text{grad}} E_p)_y dy + (\overrightarrow{\text{grad}} E_p)_z dz$$

par identification, on retrouve l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$

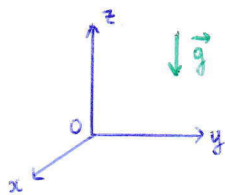
Remarque : L'expression du gradient sera fournie dans les autres systèmes de coordonnées.

En coordonnées cylindriques $\vec{\text{grad}} E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial r} \right)_{\theta, z} \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \right)_{r, z} \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)_{r, \theta} \vec{e}_z$

En coordonnées sphériques $\vec{\text{grad}} E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial r} \right)_{\theta, \varphi} \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \right)_{r, \varphi} \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \right)_{r, \theta} \vec{e}_\varphi$

2.) Exemples

* le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{z}$

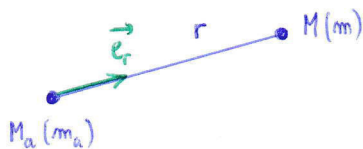


$$\Rightarrow E_p = mgz + \text{cte}$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= -\vec{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} F_x = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_{y, z} = 0 \\ F_y = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_{x, z} = 0 \\ F_z = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)_{x, y} = 0 \end{cases}$$

* Force d'interaction gravitationnelle



$$\vec{F} = - \frac{G m_a m}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\delta W = - \frac{G m_a m}{r^2} dr$$

$$F = \frac{1}{r^2}$$

$$= d \left(\frac{G m_a m}{r} \right)$$

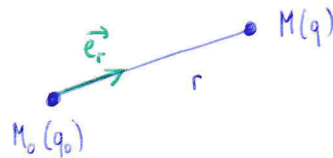
$$dF = F'(r) dr$$

$$= -dE_p$$

$$= -\frac{1}{r^2} dr$$

$$E_p = - \frac{G m_a m}{r} + \text{cte}$$

* Force d'interaction électrostatique



$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \text{cte}$$

VI. Méthode d'Euler appliquée à un oscillateur d'ordre 2

1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule simple :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\xi\omega_0 \frac{d\theta}{dt} - \omega_0^2 \sin\theta$$

$$h = t_{k+1} - t_k \quad \text{le pas}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{\dot{\theta}_{k+1} - \dot{\theta}_k}{t_{k+1} - t_k} \quad (2) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{t_{k+1} - t_k} \quad (1) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \theta_{k+1} &= (t_{k+1} - t_k) \dot{\theta}_k + \theta_k \\ &= h \dot{\theta}_k + \theta_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \dot{\theta}_{k+1} &= h \ddot{\theta}_k + \dot{\theta}_k \\ &= h (-2\xi\omega_0 \dot{\theta}_k - \omega_0^2 \sin\theta_k) + \dot{\theta}_k \end{aligned}$$

2.) Mise en œuvre

Dans le script, Θ est noté x , $\dot{\theta}$ est noté v , $\ddot{\theta}$ est noté a .

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from scipy import fftpack
```

tmax = 0.15 # en secondes

def ordre2_euler(w0, ksi, n): *m : nb de points*

t = 0
x = 1
v = 0 *conditions initiales*

h = tmax/m pas
les_t, les_x, les_v = [t], [x], [v]

For i in range(m):

t += h

*x += h * v*

*v += h * (-2 * ksi * w0 * v - w0 * 2 * np.sin(x))*

les_t.append(t)

les_x.append(x)

les_v.append(v)

return les_t, les_x, les_v

n = 1000

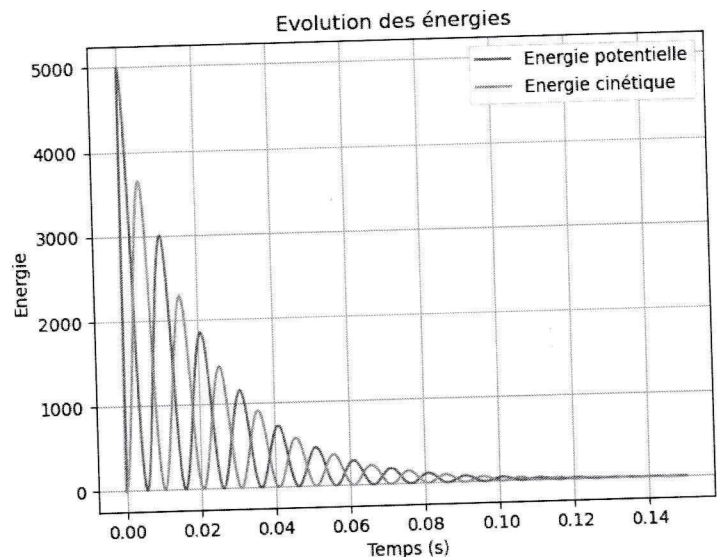
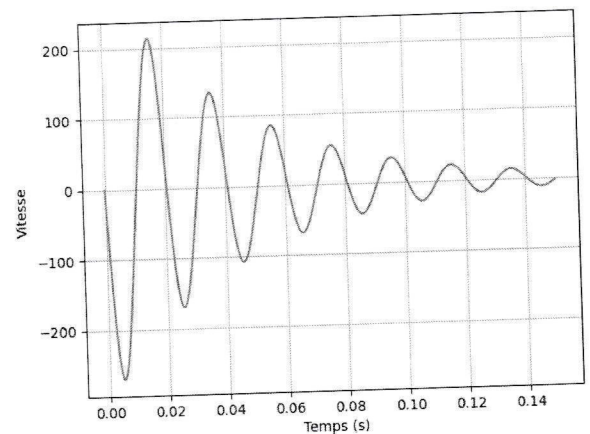
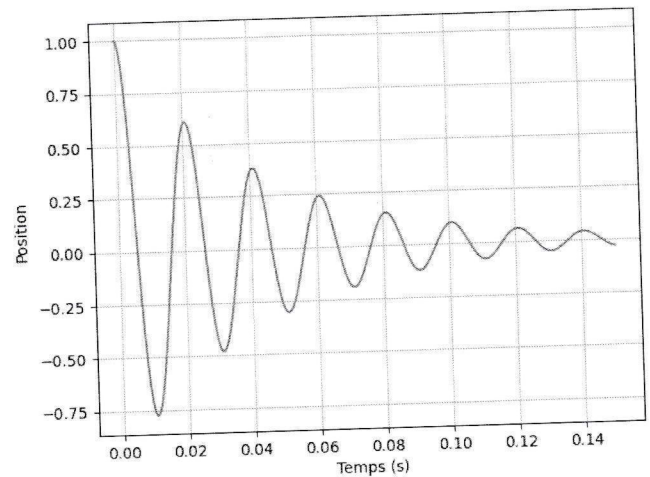
les_t, les_x, les_v = ordre2_euler(316, 0.095, n) #valeur des coefficients#

```
plt.plot(les_t, les_x)
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Position")
plt.grid(True)
```

```
plt.figure()
plt.plot(les_t, les_v)
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Vitesse")
plt.grid(True)
les_Ep = [0.5*x**2/1e-4 for x in les_x]
les_Ec = [0.5*v**2*0.1 for v in les_v]
```

```
plt.figure()
plt.title("Evolution des énergies")
plt.plot(les_t, les_Ep, label="Energie potentielle")
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Energie")
```

```
plt.plot(les_t, les_Ec, label="Energie cinétique")
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.grid(True)
```



```
plt.legend()
```

```
##Résolution avec odeint
```

```
def F(z, t):
```

```
les_t = np.linspace(0, tmax, 1000)
sol = odeint(F, (1,0), les_t)
```

```
#sol donne un tableau numpy.
#un element du tableau est formée d'une liste comprenant une position et une vitesse
#c'est la premiere colonne qui nous intéresse, on la recupere via la commande sol[:, 0]
```

```
def F1(z, t):
```

```
sol1 = odeint(F1, (1,0), les_t)
```

```
plt.figure()
les_x = sol[:, 0]
plt.plot(les_t, les_x, 'r', label = 'odeint ordre 2')
```

```
les_x1 = sol1[:, 0]
plt.plot(les_t, les_x1, 'b', label = 'odeint ordre 2 linéaire')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

