

## Mécanique    MC6 Mouvements à force centrale

I Forces centrales conservatives.....	2
1.) Forces centrales .....	2
2.) Forces centrales conservatives.....	2
II Lois générales de conservation.....	3
1.) Conservation du moment cinétique .....	3
2.) Conservation de l'énergie mécanique .....	4
3.) Description des trajectoires pour les champs newtoniens.....	5
III Mouvement dans un champ gravitationnel .....	7
1.) Les trois lois de Kepler .....	7
2.) Vitesse de libération .....	7
3.) Etude d'un mouvement circulaire .....	8
4.) Satellites terrestres .....	9
IV Script python : Satellite soumis à la force d'interaction gravitationnelle, tracé des trajectoires. ....	11
1.) Principe.....	11
2.) Mise en oeuvre.....	11



En astronomie, une **sphère armillaire**, aussi connue sous le nom d'*astrolabe sphérique*, est une modélisation basée sur la sphère céleste utilisée pour en montrer le mouvement apparent des étoiles autour de la Terre et du Soleil dans l'écliptique.

**Mesurer la surchauffe en ville** : Grâce à un suivi systématique par satellite des températures au sol, il sera possible de mieux planifier les constructions urbaines pour limiter l'effet d'îlot de chaleur. **Sean Bailly** 11 septembre 2022 | Pour la science N° 539  
L'été 2022 aura été marqué par plusieurs vagues de chaleur intenses en Europe, mais aussi aux États-Unis et en Asie. Pour les spécialistes, ce phénomène serait amené à devenir plus fréquent et intense avec le changement climatique. La situation des villes est particulièrement préoccupante à cause de l'effet « îlot de chaleur urbain » : la minéralisation de l'espace public, l'activité humaine et la configuration des villes contribuent à accumuler encore plus de chaleur.

Pour suivre cet effet, l'ESA prépare la mission LSTM (*Land Surface Temperature Monitoring*), qui sera menée par le satellite du programme Copernicus *Sentinel-8* (qui devrait être opérationnel en 2029) et qui procédera à une mesure systématique des températures au sol, grâce à une caméra infrarouge. Afin de développer les outils d'analyse adaptés à cette nouvelle mission, les chercheurs ont utilisé les données de l'instrument de la Nasa Ecostress, installé à bord de la *Station spatiale internationale*, pour simuler les données de LSTM. Sa mission scientifique concerne la réponse de la biosphère à la disponibilité de l'eau. Les plantes régulent leur température par évapotranspiration. Mais si l'eau vient à manquer, leur température augmente.

Le futur satellite *Sentinel* aura une résolution spatiale de 50 mètres, comparable à celle d'Ecostress, et 400 fois supérieure aux deux satellites *Sentinel-3*, lancés en 2016 et 2018, dédiés à une mission océanographique et à la surveillance de la végétation sur les terres émergées.

Les relevés d'Ecostress pour Paris, Milan et Prague pour le 18 juin 2022, pendant une vague de chaleur, montrent par exemple que les espaces verts jouent un rôle crucial pour réduire les températures locales. L'objectif de LSTM est d'être un outil efficace pour la planification urbaine, afin de limiter l'effet d'îlot de chaleur urbain ou, pour les agriculteurs, afin d'optimiser la gestion de l'eau.

La constellation Starlink : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Starlink>

## I Forces centrales conservatives

### 1.) Forces centrales

Définition : O point fixe dans  $\mathfrak{R}$  galiléen.

Le point matériel M(m) est soumis à une force centrale  $\vec{F}$  de centre O, si à tout instant  $\vec{F}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{OM}$  :

$$\vec{F} = F\vec{e}_r$$

Exemples : Ressort fixé en un point d'un plan, planète soumise à l'attraction d'un astre.

Hypothèses On ne s'intéresse qu'aux forces telles que  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$

Cas particulier : interactions newtoniennes :  $F(r) = -\frac{K}{r^2}$

- interaction gravitationnelle :  $m_0$  fixe en O, m mobile en M.

$$\vec{F}_{m_0 \rightarrow m} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2} \quad K = G.m_0.m > 0$$

- interaction coulombienne :  $q_0$  fixe en O, q mobile en M.

$$\vec{F}_{q_0 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \quad K = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}$$

### 2.) Forces centrales conservatives

Rappel : Une force est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle, son travail ne dépend pas du chemin suivi.

Propriété : Une force centrale de la forme  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$  est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle  $Ep(r)$ .

Pour un champ newtonien :  $F(r) = -\frac{K}{r^2}$  d'où  $Ep(r) = -\frac{K}{r} + cste$

- interaction gravitationnelle :  $\vec{F}_{m_0 \rightarrow m} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$   $Ep(r) = -G \frac{m_0 m}{r}$   $K = G.m_0.m > 0$

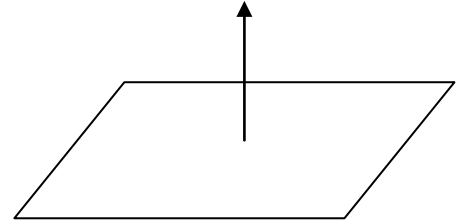
- interaction coulombienne :  $\vec{F}_{q_0 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$   $Ep(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$   $K = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}$

## II Lois générales de conservation

### 1.) Conservation du moment cinétique

Hypothèse : Point matériel M(m) soumis uniquement à une force centrale  $\vec{F} = F\vec{e}_r$

Propriété : Pour un mouvement à force centrale, il y a conservation du moment cinétique.



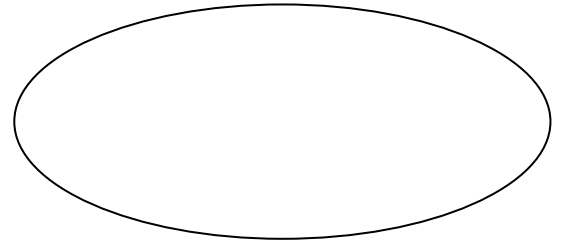
Conséquences : 1. Le mouvement est plan.

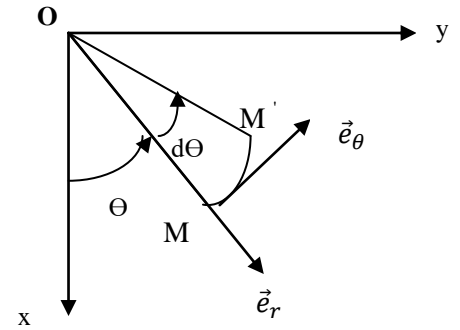
2. Le mouvement s'effectue suivant la loi des aires (deuxième loi de Kepler) :

Le rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  balaie des aires égales pendant des durées égales = la surface balayée est proportionnelle à la durée.

$\vec{L}_0 = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z$  où  $C = \frac{L_0}{m} = r^2\dot{\theta}$  est la constante de la loi des aires (à démontrer)

$dS = \frac{C}{2} dt$ .  $\frac{dS}{dt}$  est appelée vitesse aréolaire



Démonstrations :2.) Conservation de l'énergie mécanique

Hypothèse : Point matériel M(m) soumis uniquement à une force centrale conservative  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$  dérivant d'une énergie potentielle  $Ep(r)$  dans le référentiel galiléen lié à O.

Propriété : Il y a conservation de l'énergie mécanique :  $Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}mv^2 + Ep(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + Ep_{eff}(r)$   
où  $Ep_{eff}$  est l'énergie potentielle effective.

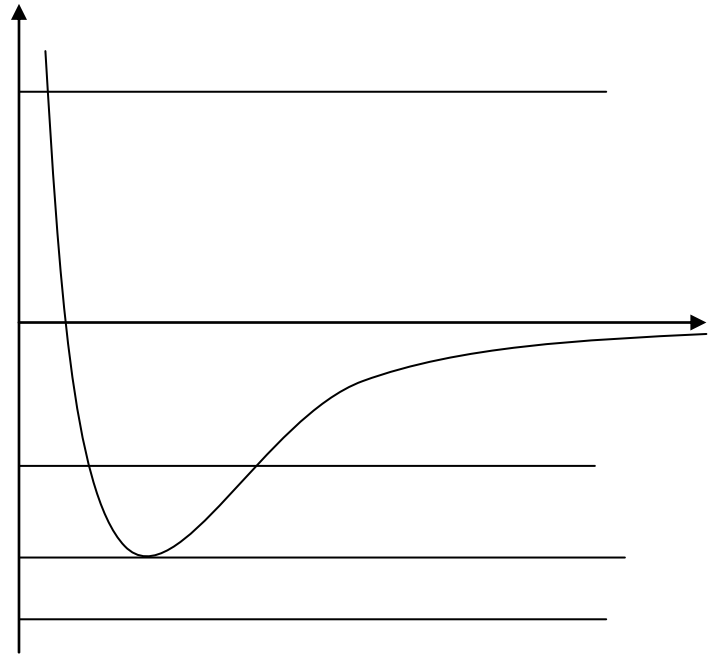
$$Ep_{eff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + Ep(r) \text{ (à démontrer)}$$

### 3.) Description des trajectoires pour les champs newtoniens

Hypothèse : Point matériel  $M(m)$  soumis à une force centrale conservative dérivant d'une énergie potentielle  $E_p = -\frac{K}{r}$  dans le référentiel galiléen lié à O.

[https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Planetes/Nature\\_FJ.php](https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Planetes/Nature_FJ.php)

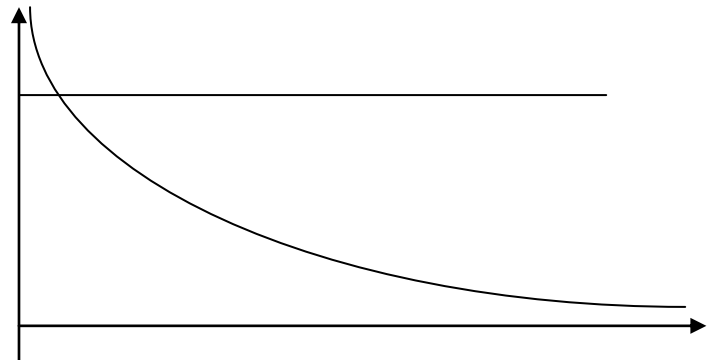
Premier cas : Interactions attractives :  $K > 0$



Remarque : En utilisant la LFD en coordonnées polaires, on peut montrer que les trajectoires sont des coniques :

$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$  où  $p$  et  $e$  sont deux constantes.  $p$  est le paramètre et  $e$  l'excentricité.  
 $e = 0$  cercle,  $0 < e < 1$  ellipse,  $e = 1$  parabole,  $e > 1$  hyperbole.

Deuxième cas : Interactions répulsives :  $K < 0$

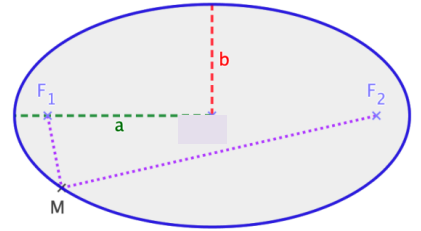


### III Mouvement dans un champ gravitationnel

#### 1.) Les trois lois de Kepler

Kepler énonça trois lois expérimentales sur le mouvement des planètes (autour de 1610)

- 1) Chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le soleil est un foyer.
- 2) L'aire balayée par le rayon soleil-planète est proportionnelle au temps mis pour la décrire (loi des aires).
- 3) Pour toutes les planètes gravitant autour du soleil,  $\frac{T^2}{a^3} = Cste$  où T est le temps de révolution et a le demi grand-axe de l'ellipse.



#### 2.) Vitesse de libération

Vitesse de libération  $v_\ell$ : Vitesse initiale minimale permettant à un satellite d'échapper à l'attraction de l'astre et de parvenir en un point infiniment éloigné ( $r \rightarrow +\infty$ ).

Elle est telle que  $E_m = 0$ , ce qui correspond à une trajectoire parabolique.  $v_\ell = \sqrt{\frac{2Gm_0}{r}}$  (à démontrer)

Système = { satellite M(m) évoluant dans le champ de gravitation de l'astre de centre O et de masse  $m_0$  }

Référentiel galiléen lié à O , les axes pointant vers trois étoiles fixes.

Hypothèses : O supposé fixe (  $m \ll m_0$  ). L'effet d'autres astres est négligé.

On peut assimiler le champ gravitationnel d'un astre à symétrie sphérique à celui d'une masse placée en son centre.

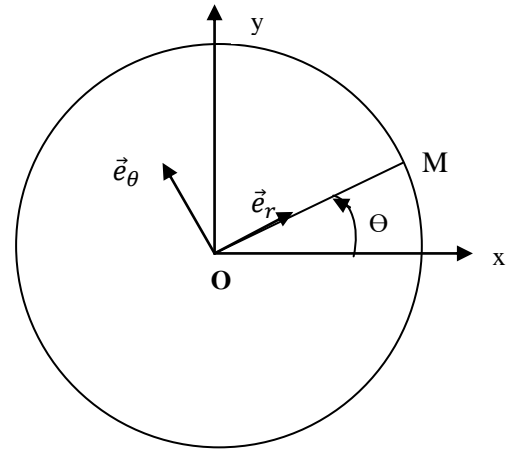
Remarque : Effet de fronde gravitationnelle

### 3.) Etude d'un mouvement circulaire

Hypothèses : Satellite en mouvement circulaire autour de O ( $m_0$ ). On montre que :

<u>Vitesse circulaire</u> : $v_c = \sqrt{\frac{gm_0}{r}}$	<u>Période</u> : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{gm_0}$	<u>Energie mécanique</u> : $Em = -\frac{gm_0m}{2r} = \frac{Ep}{2} = -Ec$
---	--	--

Pour une orbite elliptique, on admet la généralisation de T et Em en remplaçant r par a.





#### 4.) Satellites terrestres

##### a) Généralités

Système = {satellite M(m) évoluant dans le champ de gravitation de la terre de centre O et de masse  $m_T$ }

Référentiel géocentrique supposé galiléen, lié au centre de la terre O, les axes pointant vers trois étoiles fixes.

$\vec{g}$  est le champ de pesanteur.

$g_0 = 9,81 m.s^{-2}$  est l'accélération de la pesanteur au voisinage du sol, à une latitude  $\lambda = 45^\circ$ .

L'accélération de la pesanteur au niveau du sol est donnée par  $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$  Le rayon de la terre vaut  $R_T = 6380 \text{ km}$ .

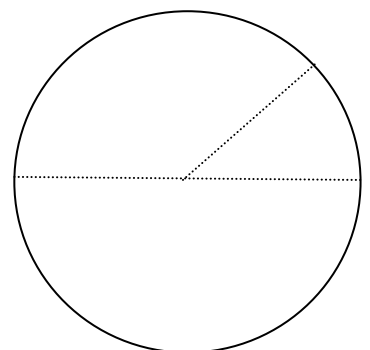
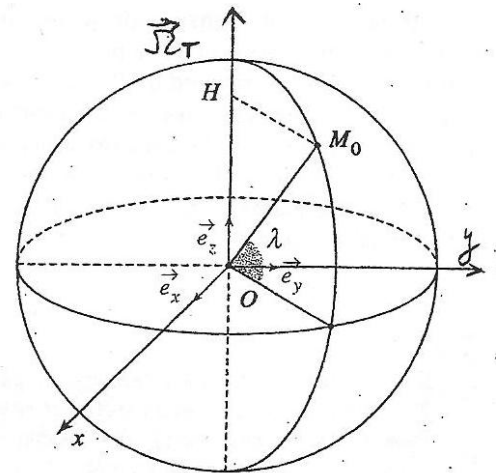
Première vitesse cosmique :  $v_{c1} = \sqrt{g_0 R_T}$  pour un satellite en orbite circulaire rasante.  $v_{c1} \approx 8 \text{ km.s}^{-1}$

Deuxième vitesse cosmique :  $v_{c2} = \sqrt{2g_0 R_T}$  pour un satellite lancé du sol.  $v_{c2} \approx 11 \text{ km.s}^{-1}$

b) Satellites géostationnaires : Satellites de télécommunication ou de télédiffusion, météorologique ou d'alerte.

Un satellite géostationnaire paraît fixe pour un observateur lié à la terre. Il est situé dans le plan de l'équateur, à une altitude  $z \approx 36\,000$  km et décrit une trajectoire circulaire de période  $T_{\text{solare}} = 24\text{h}$ .

Période sidérale  $T_{\text{sidérale}} = 86\,164\text{s}$ .



### Remarques : Autres satellites terrestres

- Satellites en orbite basse, de forte inclinaison (survolant quasiment les pôles) :  $300\text{km} < z < 2000\text{km}$   $T = 1$  à  $2\text{h}$ . Station spatiale internationale, satellites de communication, observation terrestre.
- Satellites en orbite moyenne, d'orbites inclinées d'environ  $50^\circ$  :  $z \approx 20\,000\text{ km}$   $T = 12\text{h}$ . Satellites de navigation (GPS)

IV Script python : Satellite soumis à la force d'interaction gravitationnelle, tracé des trajectoires.

#### 1.) Principe

On écrit la loi fondamentale de la dynamique appliquée au satellite dans le référentiel géocentrique galiléen

#### 2.) Mise en oeuvre

##Résolution d'une équation différentielle avec Euler  
 #on prendra  $G.M=1$  et  $r_0=1$  soit  $x_0=1$  et  $y_0=0$ ,  $v_{x0}=0$  et  $v_{y0}=v_0$   
 # $v_0=1$  pour la trajectoire circulaire,  $v_0=1,414$  pour la trajectoire parabolique

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
```

```
def eq_euler(a,b,xo,yo,vxo,vyo,n):
```

```
    return(les_t,les_x,les_y,les_vx,les_vy)
```

#on crée une liste de n=8 valeurs pour vo, entre 0.2 à 1.6, 0 posant pb.

n=8

les\_vo=np.linspace(0.6,1.6,n)

for k in range(n):

    xo,yo,vxo,vyo=1,0,0,les\_vo[k]

    les\_t,les\_x,les\_y,les\_vx,les\_vy=eq\_euler(0,5,xo,yo,vxo,vyo,10000)

    plt.plot(les\_x,les\_y,label=str(round(les\_vo[k],2)))

plt.legend()

plt.grid()

plt.axis("equal")

plt.title("trajectoire du mouvement d'un satellite en fonction de la vitesse initiale")

plt.show()

##Résolution d'une équation différentielle avec odeint

#définition de la liste des temps : on prendra 10 000 points entre 0 et 15s

les\_t = np.linspace(0, 15,10000)

##on définit une fonction eq\_mouvement d'arguments z et les\_t, qui renvoie vx, vy, ax, ay où ax et ay sont données par les équations différentielles du mouvement, avec x,y,vx,vy=z

def eq\_mouvement(z,les\_t):

    x,y,vx,vy=z

    r=(x\*\*2+y\*\*2)\*\*0.5

    ax=-x/(r\*\*3)

    ay=-y/(r\*\*3)

    return (vx,vy,ax,ay)

#on crée une liste de n=8 valeurs pour vo, entre 0.2 à 1.6, 0 posant pb.

n=8

les\_vo=np.linspace(0.2,1.6,n)

#sol=odeint(eq\_mouvement, (x0,y0,vx0,vy0), les\_t) donne un tableau numpy.

#un element du tableau est formée d'une liste comprenant les positions et les vitesses

#on récupère les deux premières colonnes (via la commande sol[:, 0] pour la colonne 1)

#on trace les trajectoires correspondant aux différentes valeurs de v0.

for k in range(n):

    (x0,y0,vx0,vy0)=(1,0,0,les\_vo[k])

    sol=odeint(eq\_mouvement, (x0,y0,vx0,vy0), les\_t)

    X=sol[:,0]#on récupère toute la première colonne

    Y=sol[:,1]#on récupère toute la deuxième colonne

    plt.plot(X,Y,label=str(round(les\_vo[k],2)))

plt.legend()

plt.grid()

plt.axis("equal")

plt.title("trajectoire du mouvement d'un satellit

plt.show()

trajectoire du mouvement d'un satellite en fonction de la vitesse initiale

