

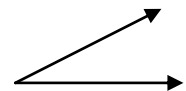
Mécanique MC5 Loi du moment cinétique.
Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Produit scalaire	1
Produit vectoriel.....	1
I Moment d'une force	2
1.) Point matériel.....	2
2.) Système de points matériels Syst = {M _i (m _i)}	4
II Moment cinétique.....	5
1.) Définition.....	5
2.) Théorème du moment cinétique	6
3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ = (Oz)	7
III Approche énergétique des solides.....	10
1.) Théorèmes généraux.....	10
2.) Energies	10
3.) Puissance des actions sur un solide.....	10
IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations	11
1.) Principe.....	11
2.) Mise en oeuvre.....	11
Conclusion : Tabouret d'inertie	12



Produit scalaire $w = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si \vec{u} et \vec{v} sont perpendiculaires.

Produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :
 \vec{w} est perpendiculaire au plan formé par \vec{u}, \vec{v} $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct.
 $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha|$
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

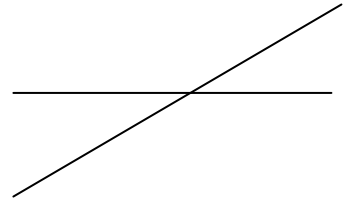


I Moment d'une force

1.) Point matériel

a) Moment au point A d'une force \vec{F} appliquée au point M :

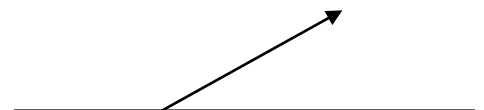
$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$



b) Moment d'une force \vec{F} appliquée au point M, par rapport à un axe Δ :

Définition : Soit un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire \vec{u} : $M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \|\vec{M}_A(\vec{F})\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{M}_A)$

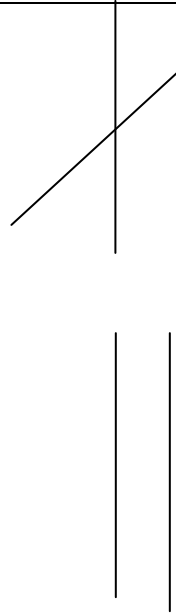
Propriétés : $\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{M}_A(\vec{F})$ $M_\Delta(\vec{F})$ a même valeur en tout point de l'axe Δ .



Propriétés : Si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

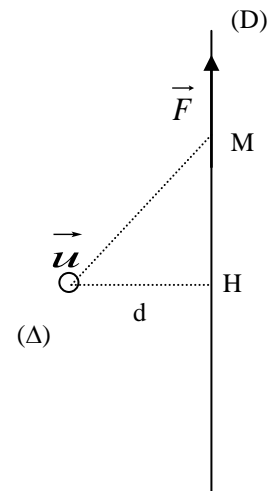
1) Si D (droite support de \vec{F} , passant par M), coupe Δ (passant par A , de vecteur unitaire \vec{u}) en un point I , alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

2) Si $(D) \parallel (\Delta)$, alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.



c) Application

Propriété : $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F$ où d est le bras de levier (distance à l'axe).



Ces résultats s'appliquent à une force quelconque en la décomposant en une force coplanaire et une force non coplanaire à Δ : $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$. On a alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F_{\perp}$.

2.) Système de points matériels $\text{Syst} = \{M_i (m_i)\}$

a) Moments intérieurs et extérieurs

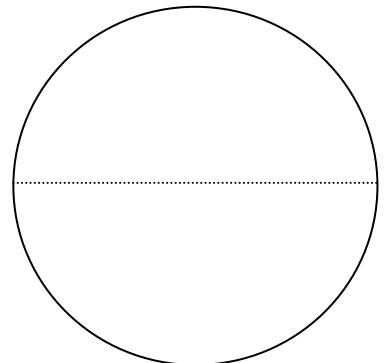
Moment résultant des forces intérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,int} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \vec{0}$

Moment résultant des forces extérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,ext} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,ext})$

b) Notion de couple

Couple : Action menée sur un système, telle que la force résultante soit nulle;

Un couple ne déplace pas le centre d'inertie d'un système, mais tend à le faire tourner.



c) Liaison pivot : Mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe Δ .
On n'a donc pas de translation suivant Δ .

Liaison pivot idéale : $M_{\Delta}(\text{liaison}) = 0$. On néglige les frottements (en utilisant des roulements à bille ou à aiguille).

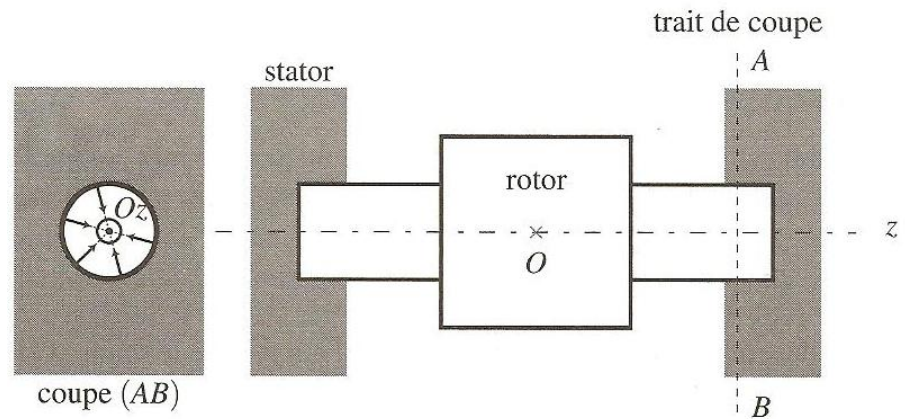


Figure 19.7 – Schéma de principe d'une liaison pivot.

II Moment cinétique

1.) Définition

a) pour un point matériel

Moment cinétique au point A du point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Moment cinétique par rapport à l'axe Δ (passant par A, de vecteur unitaire) \vec{u} : $L_{\Delta}(M/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(M) \cdot \vec{u}$

Propriété : $L_{\Delta}(M)$ a même valeur en tout point de l'axe Δ .

Propriétés : Si D (droite support de \vec{v} , passant par M), passe par A, alors $\vec{L}_A(M) = \vec{0}$.
Si D (droite support de \vec{v} passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire \vec{u})
ou si (D) // (Δ), c'est-à-dire si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $L_{\Delta}(M) = 0$.

b) pour un système de points matériels $\text{Syst} = \{M_i (m_i)\}$:

$$\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/\mathcal{R}) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R})$$

2.) Théorème du moment cinétique

a) pour un point matériel M(m)

Théorème du moment cinétique en un point fixe A, dans un référentiel \mathcal{R} galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F}) \quad \text{où } \vec{F} \text{ est la résultante des forces appliquées}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe Δ , dans un référentiel \mathcal{R} galiléen

$$\frac{dL_{\Delta}(M/\mathcal{R})}{dt} = M_{\Delta}(\vec{F}) \quad \text{où } \vec{F} \text{ est la résultante des forces appliquées}$$

b) pour un système de points matériels Syst = $\{M_i (m_i)\}$:

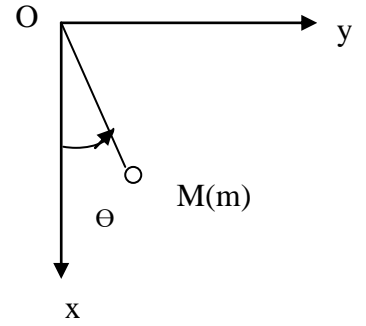
Théorème du moment cinétique en A point fixe, dans un référentiel \mathcal{R} galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(Syst/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_{Aext} \quad (\text{moment résultant des forces extérieures au système au point A})$$

Théorème du moment cinétique par rapport à Δ axe fixe, dans un référentiel \mathcal{R} galiléen

$$\frac{dL_{\Delta}(Syst/\mathcal{R})}{dt} = M_{\Delta ext} \quad (\text{moment résultant des forces extérieures au système par rapport à l'axe})$$

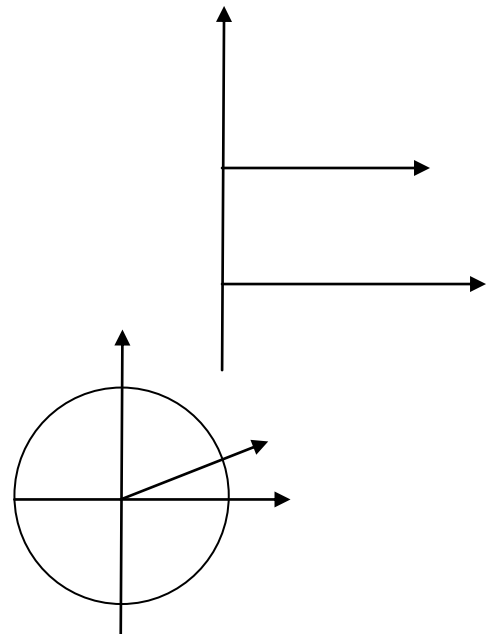
c) Application au pendule simple



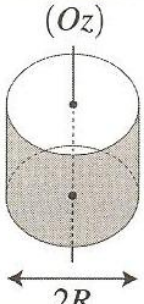
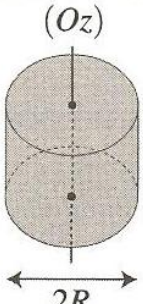
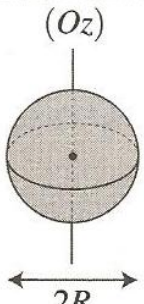

3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (Oz)$

a) Moment cinétique scalaire d'un solide

$L_{\Delta}(S/\mathcal{R}) = \sum_i L_{\Delta}(M_i) = J_{\Delta} \omega$ où $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ



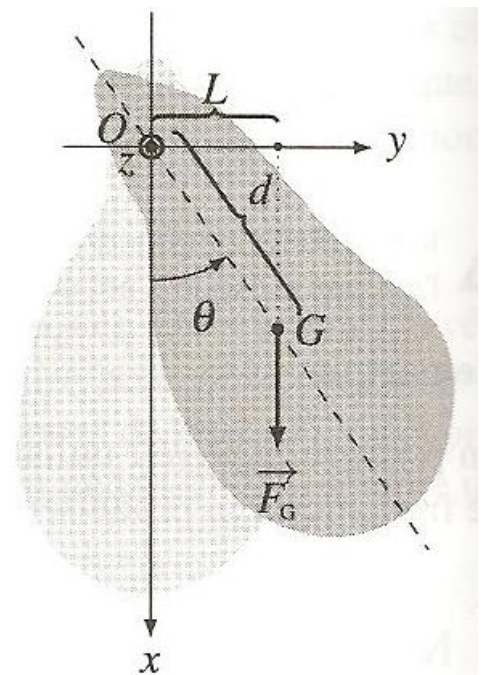
Exemples :

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
			

b) Théorème du moment cinétique pour un solide S en rotation autour d'un axe fixe

Hypothèse : Δ axe fixe, dans un référentiel \mathcal{R} galiléen $\frac{dL_{\Delta}(S/\mathcal{R})}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta} \text{ext}$
 où $M_{\Delta \text{ext}}$ est le moment résultant des forces extérieures au solide par rapport à l'axe
 $L_{\Delta}(S/\mathcal{R}) = J_{\Delta} \omega$ et $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ

c) Application au pendule pesant



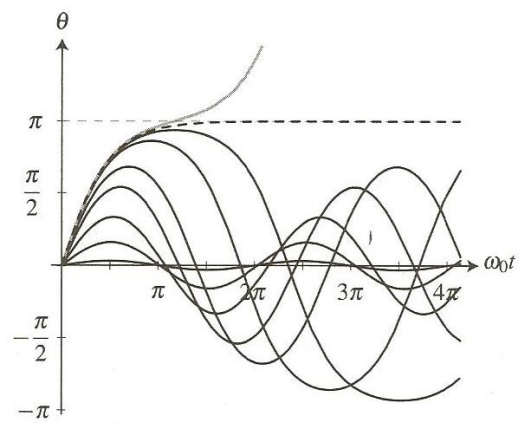


Figure 19.11 – Évolution temporelle de l'angle θ : en trait continu noir, les mouvements sont pendulaires ; en trait continu gris, il est révolutif. Les pointillés correspondent à la transition entre ces deux régimes.

III Approche énergétique des solides

1.) Théorèmes généraux

Pour un système quelconque :

Théorème de l'énergie cinétique dans \mathcal{R} galiléen $E_c(t_2) - E_c(t_1) = W(\vec{F}_{int}) + W(\vec{F}_{ext})$

Théorème de la puissance cinétique dans \mathcal{R} galiléen $\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_{int}) + P(\vec{F}_{ext})$

Théorème de l'énergie mécanique dans \mathcal{R} galiléen

$$E_m(t_2) - E_m(t_1) = W(\vec{F}_{nc\ int}) + W(\vec{F}_{nc\ ext}) \quad (\vec{F}_{nc} \text{ forces non conservatives})$$

Théorème de la puissance mécanique dans \mathcal{R} galiléen

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_{nc\ int}) + P(\vec{F}_{nc\ ext})$$

Pour un solide :

$$\boxed{P_{int} = 0 \text{ et } W_{int} = 0}$$

2.) Energies

a) Energie cinétique

Pour un système de points $E_c(Syst/\mathcal{R}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Pour un solide en translation $E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m v_G^2$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe $E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$

b) Energie potentielle de pesanteur $E_{pp}(S) = mgz_G + cste$

3.) Puissance des actions sur un solide

a) Solide en translation $\boxed{P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_G}$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème de la puissance cinétique : dans \mathcal{R} galiléen, $\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} = M_{\Delta ext} \cdot \omega}$

IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations

1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

2.) Mise en oeuvre

MC5 étude du pendule pesant : non isochronisme des oscillations

résolution par la méthode d'Euler

#importation des bibliothèques

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

#définition de la fonction pendule pesant

#on veut résoudre l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements

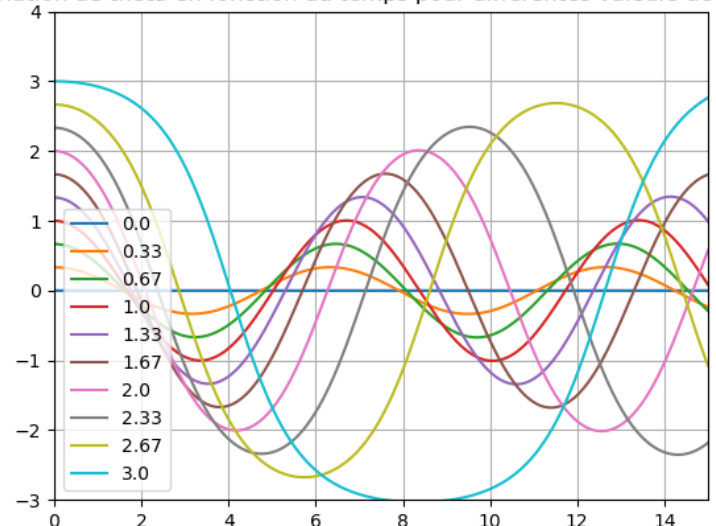
#t varie entre a et b

#x=theta et v=x'=theta'

#wo=sqrt(mgd/J)=1rad/s=omega

def pendulepesant(a,b,xo,vo,omega,n):

Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0



return(les_t,les_x,les_v)

#tracé des courbes :

#tracer les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de vo comprises 0 et 3 rad/s

plt.axis([0,15,-3,10])

```
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de (dtheta/dt)0")
plt.figure()
```

#tracer sur un nouveau graphe les courbes $\theta(t)$ superposées pour 10 valeurs de θ_0 comprises 0 et 3 rad

```
plt.axis([0,15,-3,4])
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0")
plt.show()
```

Conclusion : Tabouret d'inertie

