

## Mécanique MC5 Loi du moment cinétique.

### Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Produit scalaire .....	1
Produit vectoriel.....	1
I Moment d'une force .....	2
1.) Point matériel.....	2
2.) Système de points matériels Syst = {M <sub>i</sub> (m <sub>i</sub> )} .....	4
II Moment cinétique.....	5
1.) Définition.....	5
2.) Théorème du moment cinétique .....	6
3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ = (Oz) .....	7
III Approche énergétique des solides .....	10
1.) Théorèmes généraux .....	10
2.) Energies .....	10
3.) Puissance des actions sur un solide.....	10
IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations .....	11
1.) Principe.....	11
2.) Mise en oeuvre.....	11
Conclusion : Tabouret d'inertie .....	12



Produit scalaire                           $w = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$   
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$          $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont perpendiculaires.

Produit vectoriel                           $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  tel que :  
 $\vec{w}$  est perpendiculaire au plan formé par  $\vec{u}, \vec{v}$          $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est un trièdre direct.  
 $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha|$   
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$                            $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$                           si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

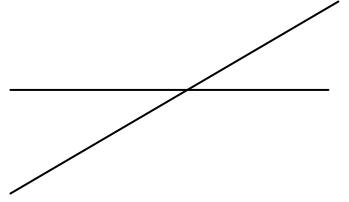


## I Moment d'une force

### 1.) Point matériel

a) Moment au point A d'une force  $\vec{F}$  appliquée au point M :

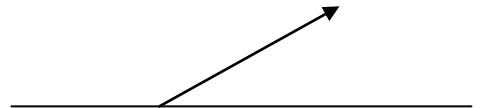
$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$



b) Moment d'une force  $\vec{F}$  appliquée au point M, par rapport à un axe  $\Delta$  :

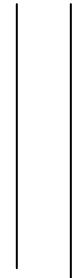
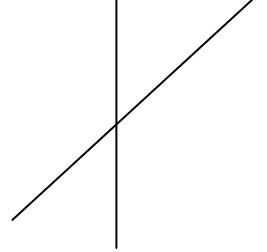
Définition : Soit un axe  $\Delta$  passant par A, de vecteur unitaire  $\vec{u}$  :  $M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \|\vec{M}_A(\vec{F})\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{M}_A)$

Propriétés :  $\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{M}_A(\vec{F})$   $M_\Delta(\vec{F})$  a même valeur en tout point de l'axe  $\Delta$ .



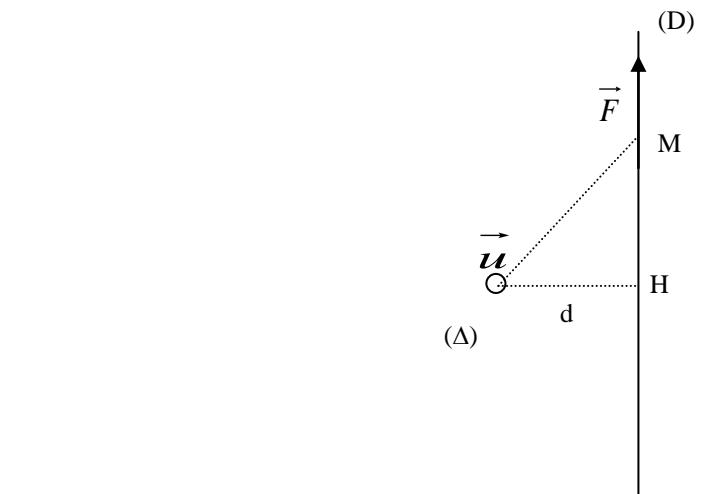
Propriétés : Si  $(D)$  et  $(\Delta)$  sont coplanaires, alors  $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$ .

- 1) Si  $D$  (droite support de  $\vec{F}$ , passant par  $M$ ), coupe  $\Delta$  (passant par  $A$ , de vecteur unitaire  $\vec{u}$ ) en un point  $I$ , alors  $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$ .
- 2) Si  $(D) \parallel (\Delta)$ , alors  $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$ .



### c) Application

Propriété :  $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F$  où  $d$  est le bras de levier (distance à l'axe).



Ces résultats s'appliquent à une force quelconque en la décomposant en une force coplanaire et une force non coplanaire à  $\Delta$  :  $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$ . On a alors  $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F_{\perp}$ .

2.) Système de points matériels  $Syst = \{M_i (m_i)\}$

a) Moments intérieurs et extérieurs

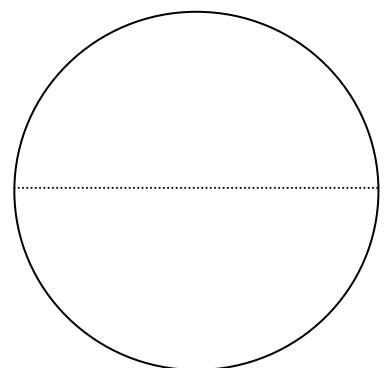
Moment résultant des forces intérieures au système au point A :  $\vec{M}_{A,int} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \vec{0}$

Moment résultant des forces extérieures au système au point A :  $\vec{M}_{A,ext} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,ext})$

b) Notion de couple

Couple : Action menée sur un système, telle que la force résultante soit nulle;

Un couple ne déplace pas le centre d'inertie d'un système, mais tend à le faire tourner.



c) Liaison pivot : Mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe  $\Delta$ .

On n'a donc pas de translation suivant  $\Delta$ .

Liaison pivot idéale :  $M_\Delta(\text{liaison}) = 0$ . On néglige les frottements (en utilisant des roulements à bille ou à aiguille).

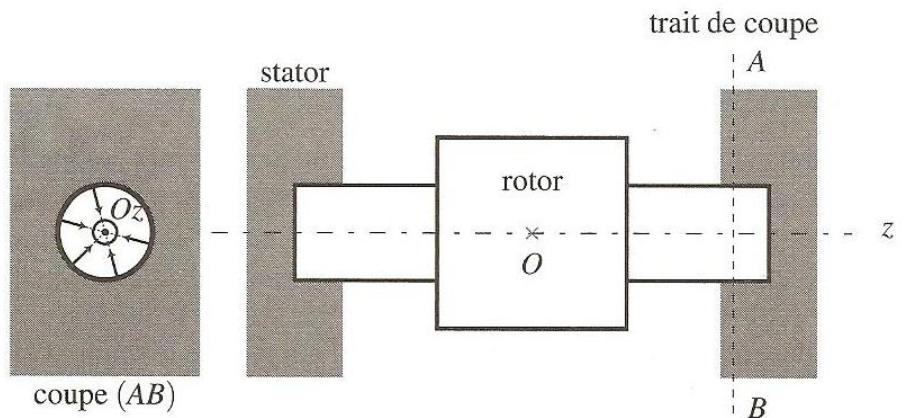


Figure 19.7 – Schéma de principe d'une liaison pivot.

## II Moment cinétique

### 1.) Définition

a) pour un point matériel

Moment cinétique au point A du point matériel M(m) de vitesse  $\vec{v}(M/\mathfrak{R})$

$$\vec{L}_A(M/\mathfrak{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathfrak{R})$$

Moment cinétique par rapport à l'axe  $\Delta$  (passant par A, de vecteur unitaire  $\vec{u}$ ) :  $L_\Delta(M/\mathfrak{R}) = \vec{L}_A(M) \cdot \vec{u}$

Propriété :  $L_\Delta(M)$  a même valeur en tout point de l'axe  $\Delta$ .

Propriétés :

- Si D (droite support de  $\vec{v}$ , passant par M), passe par A, alors  $\vec{L}_A(M) = \vec{0}$ .
- Si D (droite support de  $\vec{v}$  passant par M), coupe  $\Delta$  (passant par A, de vecteur unitaire  $\vec{u}$ ) ou si (D) // ( $\Delta$ ), c'est-à-dire si (D) et ( $\Delta$ ) sont coplanaires, alors  $L_\Delta(M) = 0$ .

b) pour un système de points matériels  $\text{Syst} = \{M_i (m_i)\}$ :

$$\vec{L}_A(Syst/\mathfrak{R}) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/\mathfrak{R}) = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i/\mathfrak{R})$$

## 2.) Théorème du moment cinétique

a) pour un point matériel M(m)

Théorème du moment cinétique en un point fixe A, dans un référentiel  $\mathfrak{R}$  galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(M/\mathfrak{R})}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F}) \quad \text{où } \vec{F} \text{ est la résultante des forces appliquées}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe  $\Delta$ , dans un référentiel  $\mathfrak{R}$  galiléen

$$\frac{dL_\Delta(M/\mathfrak{R})}{dt} = M_\Delta(\vec{F}) \quad \text{où } \vec{F} \text{ est la résultante des forces appliquées}$$

b) pour un système de points matériels Syst = {M<sub>i</sub> (m<sub>i</sub>)}:

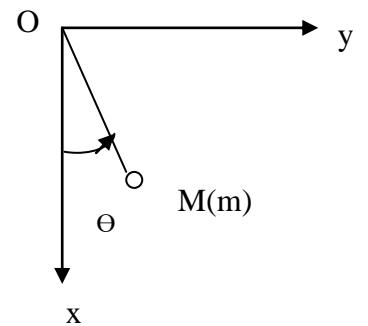
Théorème du moment cinétique en A point fixe, dans un référentiel  $\mathfrak{R}$  galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(Syst/\mathfrak{R})}{dt} = \vec{M}_{Aext} \quad (\text{moment résultant des forces extérieures au système au point A})$$

Théorème du moment cinétique par rapport à  $\Delta$  axe fixe, dans un référentiel  $\mathfrak{R}$  galiléen

$$\frac{dL_\Delta(Syst/\mathfrak{R})}{dt} = M_{\Delta ext} \quad (\text{moment résultant des forces extérieures au système par rapport à l'axe})$$

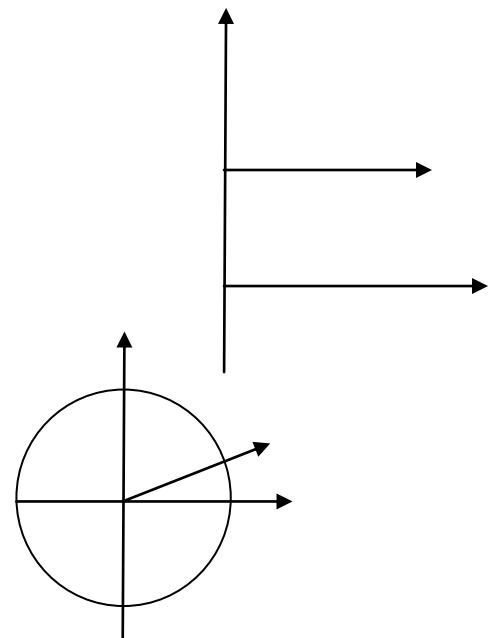
c) Application au pendule simple



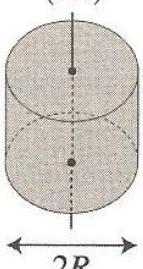
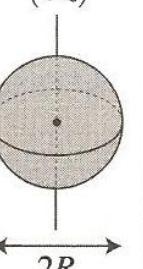
3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta = (Oz)$

a) Moment cinétique scalaire d'un solide

$$L_{\Delta}(S/\mathfrak{R}) = \sum_i L_{\Delta}(M_i) = J_{\Delta}\omega \quad \text{où } J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2 \text{ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe } \Delta$$



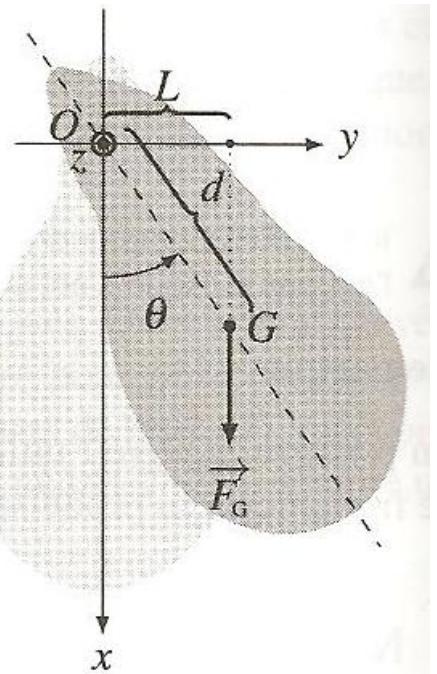
Exemples :

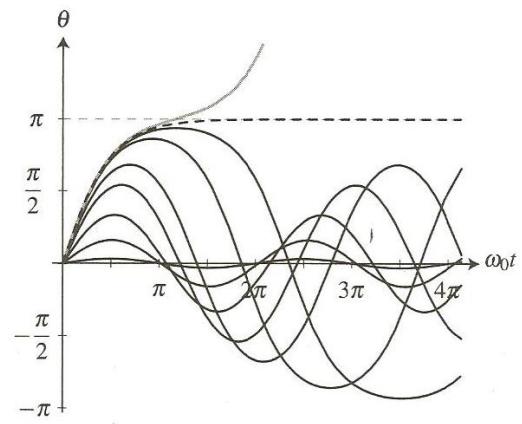
cylindre vide de rayon $R$	cylindre plein de rayon $R$	boule de rayon $R$	barre de longueur $L$
$mR^2$	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
( $Oz$ ) 	( $Oz$ ) 	( $Oz$ ) 	( $Oz$ ) 

b) Théorème du moment cinétique pour un solide S en rotation autour d'un axe fixe

Hypothèse :  $\Delta$  axe fixe, dans un référentiel  $\mathfrak{R}$  galiléen  $\frac{dL_{\Delta}(S/\mathfrak{R})}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta ext}$   
 où  $M_{\Delta ext}$  est le moment résultant des forces extérieures au solide par rapport à l'axe  $\Delta$   
 $L_{\Delta}(S/\mathfrak{R}) = J_{\Delta}\omega$  et  $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$  est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $\Delta$

c) Application au pendule pesant





**Figure 19.11** – Évolution temporelle de l'angle  $\theta$  : en trait continu noir, les mouvements sont pendulaires ; en trait continu gris, il est révolutif. Les pointillés correspondent à la transition entre ces deux régimes.

### III Approche énergétique des solides

#### 1.) Théorèmes généraux

Pour un système quelconque :

$$\text{Théorème de l'énergie cinétique dans } \mathfrak{R} \text{ galiléen} \quad E_c(t_2) - E_c(t_1) = W(\vec{F}_{int}) + W(\vec{F}_{ext})$$

$$\text{Théorème de la puissance cinétique dans } \mathfrak{R} \text{ galiléen} \quad \frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_{int}) + P(\vec{F}_{ext})$$

Théorème de l'énergie mécanique dans  $\mathfrak{R}$  galiléen

$$E_m(t_2) - E_m(t_1) = W(\vec{F}_{nc\ int}) + W(\vec{F}_{nc\ ext}) (\vec{F}_{nc} \text{ forces non conservatives})$$

Théorème de la puissance mécanique dans  $\mathfrak{R}$  galiléen

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_{nc\ int}) + P(\vec{F}_{nc\ ext})$$

Pour un solide :  $P_{int} = 0$  et  $W_{int} = 0$

#### 2.) Energies

##### a) Energie cinétique

$$\text{Pour un système de points} \quad E_c(Syst/\mathfrak{R}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\text{Pour un solide en translation} \quad E_c(S/\mathfrak{R}) = \frac{1}{2} m v_G^2$$

$$\text{Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe} \quad E_c(S/\mathfrak{R}) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

$$\text{b) Energie potentielle de pesanteur} \quad E_{pp}(S) = mgz_G + cste$$

#### 3.) Puissance des actions sur un solide

$$\text{a) Solide en translation} \quad P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_G$$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe

$$\text{Théorème de la puissance cinétique : dans } \mathfrak{R} \text{ galiléen, } \frac{dE_c}{dt} = P_{ext} = M_{\Delta ext} \cdot \omega$$

## IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations

### 1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

### 2.) Mise en oeuvre

## MC5 étude du pendule pesant : non isochronisme des oscillations

## résolution par la méthode d'Euler

```
#importation des bibliothèques
```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

#définition de la fonction pendule pesant

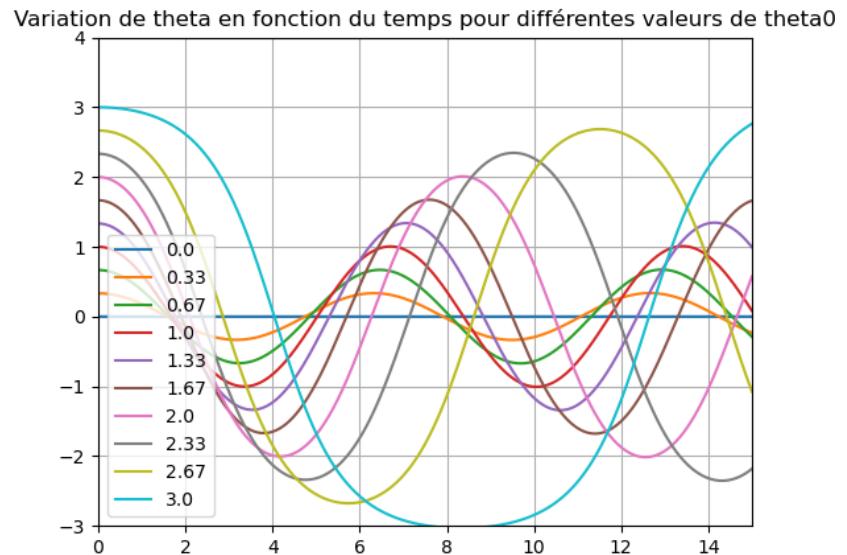
#on veut résoudre l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements

#t varie entre a et b

```
#x=theta et v=x'=theta'
```

```
#wo=sqrt(mgd/J)=1rad/s=omega
```

```
def pendulepesant(a,b,xo,vo,omega,n):
```



```
    return(les_t,les_x,les_v)
```

#tracé des courbes :

#tracer les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de vo comprises 0 et 3 rad/s

```
plt.axis([0,15,-3,10])
```

```
plt.legend()  
plt.grid()  
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de (dtheta/dt)0")  
plt.figure()  
  
#tracer sur un nouveau graphe les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de xo comprises 0 et 3 rad
```

```
plt.axis([0,15,-3,4])  
plt.legend()  
plt.grid()  
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0")  
plt.show()
```

### Conclusion : Tabouret d'inertie

