
PROGRAMMES 17 et 18.

PROGRAMME 17 : du 23/02 au 27/02

REPRISE DE LA DÉRIVATION

SYSTÈMES LINÉAIRES

K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ Système linéaire de n équations à p inconnues. Système homogène associé à un système linéaire. Système compatible, incompatible.
- ★ Opérations élémentaires sur les lignes d'un système. On emploiera les notations suivantes : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- ★ Algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

CALCUL MATRICIEL

K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K . Transposition.
- ★ Matrices carrées particulières : ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrices diagonales, matrice I_n .
Matrices triangulaires.
- ★ Opérations sur les matrices : addition, loi externe . (« multiplication d'un scalaire et d'une matrice »).
Transposée d'une combinaison linéaire.
- ★ Matrice élémentaire $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ s'écrit comme combinaison linéaire de matrices élémentaires (de même format).
- ★ Produit de deux matrices. Propriétés des opérations matricielles. Transposée d'un produit.
Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$. $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$ ($E_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $E_{k,\ell}$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$).
- ★ Retour sur les systèmes linéaires. Tout système (S) s'écrit $AX = B$.
Système homogène associé : $(H) : AX = 0$.
Si (S) est compatible, en notant X_0 une solution particulière de (S) , alors l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble $\{X_0 + Y/Y \text{ est solution de } (H)\}$.
- ★ Matrices carrées : Puissances d'une matrice carrée. Formule du binôme. Le produit matriciel n'est pas commutatif. Il existe des matrices non nulles dont le produit est nul. Il existe des matrices non nulles qui possèdent une puissance nulle (matrices nilpotentes). Matrices diagonales, triangulaires : stabilité par les opérations. Matrices symétriques, antisymétriques.
- ★ Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes. Matrices liées aux opérations élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation. Effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice liée à une opération élémentaire. Adaptation aux opérations élémentaires sur les colonnes.
- ★ Matrices carrées inversibles : définition. On introduit la terminologie « groupe linéaire », et la notation $GL_n(K)$, pour désigner l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n , mais tout développement sur la notion de groupe est hors programme. Inverse d'un produit de matrices inversibles. Transposée d'un inverse. Inversibilité des matrices liées aux opérations élémentaires.

- ★ Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, équivalence des propriétés suivantes :
 - ☐ A est inversible
 - ☐ Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle
 - ☐ Pour toute matrice colonne Y , le système $AX = Y$ admet une unique solution
- ★ Conservation de l'inversibilité par opérations élémentaires sur les lignes et / ou sur les colonnes. Inversibilité d'une matrice triangulaire, d'une matrice diagonale. Inverse d'une matrice diagonale inversible. Si T est triangulaire supérieure (resp. inférieure) inversible alors T^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure).
- ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. S'il est possible, par opérations élémentaires sur les lignes de A de passer de A à I_n alors A est inversible et la même suite d'opérations élémentaires permet de passer de I_n à A^{-1} .

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- | | |
|---|--|
| ☐ Définition de la dérivabilité en un point. | ☐ Définition du produit matriciel (en donnant bien tous les formats). |
| ☐ Dérivabilité à droite, à gauche en un point. | ☐ Produit de deux matrices élémentaires. |
| ☐ Définition des dérivées successives d'une fonction. | ☐ Formule du binôme. |
| ☐ Formule de Leibniz. | ☐ Définition d'une matrice symétrique, antisymétrique. |
| ☐ Définition d'un extremum local. | ☐ Interprétation matricielle d'une opération élémentaire sur les lignes ou sur les colonnes. |
| ☐ Résultat sur les extrema d'une fonction dérivable. | ☐ Définition d'une matrice inversible. |
| ☐ Théorème de Rolle. | ☐ Résultat sur le produit de matrices inversibles et sur la transposée d'une matrice inversible. |
| ☐ Égalité des accroissements finis. | ☐ Caractérisation des matrices inversibles en utilisant un système linéaire. |
| ☐ Inégalité des accroissements finis. | ☐ Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale ou triangulaire soit inversible. Que peut-on dire des inverses ? |
| ☐ Monotonie des applications dérivables. | ☐ Comment calculer l'inverse par opérations élémentaires sur une matrice. |
| ☐ Théorème de la limite de la dérivée. | |
| ☐ Définition d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire. | |
| ☐ Définition de la transposée d'une matrice et résultats sur la transposition (combinaison linéaire et produit). | |

DÉMONSTRATIONS

- Égalité des accroissements finis.
- Transposée d'un produit (ne pas oublier de bien préciser les formats des matrices concernées).
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par produit.

* * * * *

PROGRAMME 18 : du 02/03 au 06/03

REPRISE DES SYSTÈMES ET DU CALCUL MATRICIEL

ESPACES VECTORIELS : LE DÉBUT

- ★ Structure de K -espace vectoriel. Premiers exemples de référence : K^n , $K^X = \mathcal{F}(X, K)$ (cas particulier des suites) et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Règles de calcul.
- ★ Sous-espace F d'un K -espace vectoriel E ($F \subset E$, $F \neq \emptyset$, F stable par combinaison linéaire). L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ est un sev de E et est appelé sous-espace engendré par $u_1, \dots, u_n$. C'est le plus petit sev de E contenant les vecteurs u_i . Notation $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Intersection de sous-espaces vectoriels.
- ★ Somme de deux sous-espaces vectoriels. Notation $F + G$. Somme directe (la somme est dite directe lorsque la décomposition selon $F + G$ est unique). Notation $F \oplus G$. Caractérisation par $F \cap G = \{0_E\}$. Sous-espaces supplémentaires. $E = F \oplus G \iff \forall u \in E, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w$.

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- | | |
|--|---|
| □ Définition d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire. | □ Caractérisation des matrices inversibles en utilisant un système linéaire. |
| □ Définition de la transposée d'une matrice et résultats sur la transposition (combinaison linéaire et produit). | □ Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale ou triangulaire soit inversible. Que peut-on dire des inverses ? |
| □ Définition du produit matriciel (en donnant bien tous les formats). | □ Comment calculer l'inverse par opérations élémentaires sur une matrice. |
| □ Produit de deux matrices élémentaires. | □ Donner des exemples de référence de K -ev. |
| □ Formule du binôme. | □ Définition d'un sev d'un K -ev E . Donner des exemples de sev d'ev de référence. |
| □ Définition d'une matrice symétrique, antisymétrique. | □ Définition du sev engendré par des vecteurs. |
| □ Interprétation matricielle d'une opération élémentaire sur les lignes ou sur les colonnes. | □ Définition d'une somme de sev, d'une somme directe. |
| □ Définition d'une matrice inversible. | □ Traductions de $E = F \oplus G$ (1 : $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, 2 : $\forall u \in E, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w$). L'unicité dans la décomposition correspond à $F \cap G = \{0_E\}$. |
| □ Résultat sur le produit de matrices inversibles et sur la transposée d'une matrice inversible. | |

DÉMONSTRATIONS

- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par produit.
- Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n se déduisant l'une de l'autre par opérations élémentaires sur les lignes et / ou sur les colonnes. Alors A est inversible ssi B est inversible.
- Soit E un K -ev et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E .

Alors $\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i / (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \right\}$ est le plus petit sev de E contenant les vecteurs $u_1, \dots, u_n$.