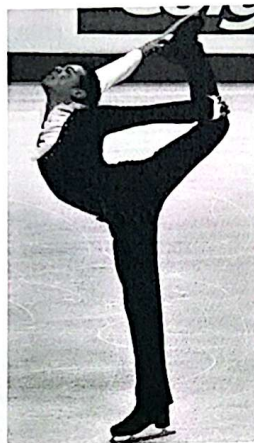


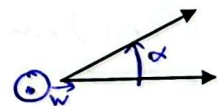
Mécanique MC5 Loi du moment cinétique.
Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Produit scalaire	1
Produit vectoriel.....	1
I Moment d'une force	2
1.) Point matériel.....	2
2.) Système de points matériels Syst = {M _i (m _i)}	4
II Moment cinétique.....	5
1.) Définition.....	5
2.) Théorème du moment cinétique	6
3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ = (Oz)	7
III Approche énergétique des solides.....	10
1.) Théorèmes généraux.....	10
2.) Energies	10
3.) Puissance des actions sur un solide.....	10
IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations	11
1.) Principe.....	11
2.) Mise en oeuvre.....	11
Conclusion : Tabouret d'inertie.....	12



Produit scalaire $w = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

Produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :
 $\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}, \vec{v}$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct.
 $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha|$
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires



règle de la main droite (ou du tire bouchon)
 On tourne de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, la poutre indique $\vec{w}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

I Moment d'une force

1.) Point matériel

a) Moment au point A d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M :

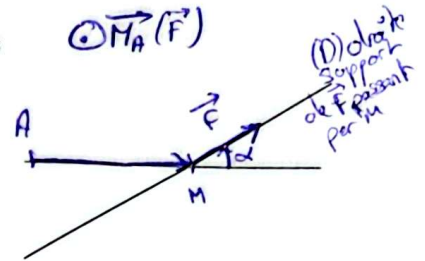
$$\|\vec{M}_A(\vec{F})\| = \|\vec{AM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin \alpha|$$

$$\text{N.m ou kg m}^2 \text{s}^{-2} = \text{Joule J}$$

$(\vec{AM}, \vec{F}, \vec{M}_A(\vec{F}))$ sens direct

Rq: si $\vec{AM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires
cad si $A \in (D)$, $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0}$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$



b) Moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M, par rapport à un axe Δ :

Définition : Soit un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$: $M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \|\vec{M}_A(\vec{F})\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{M}_A)$

(produit scalaire cosinus)

$\vec{u}$ vect. directeur $\|\vec{u}\| = 1$

Propriétés : $\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{M}_A(\vec{F})$ $M_\Delta(\vec{F})$ a même valeur en tout point de l'axe Δ . (démonstration à faire)

$M_\Delta(\vec{F}) > 0$ ou < 0 suivant l'orientation de (Δ)

(cad le sens de $\vec{u}$)

$M_\Delta(\vec{F})$ est le projeté orthogonal de $\vec{M}_A(\vec{F})$ sur l'axe (Δ) orienté par $\vec{u}$

Rq: si $\vec{M}_A(\vec{F}) \perp \Delta(\vec{u})$, $M_\Delta(\vec{F}) = 0$

démon: $(A, A') \in (\Delta)$



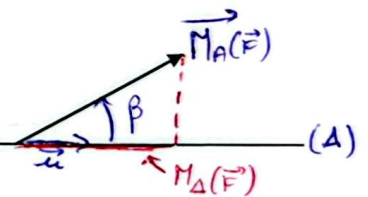
$$\begin{aligned} & \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} - \vec{M}_{A'}(\vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} - (\vec{A'M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} + (\vec{MA'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &= ((\vec{AM} + \vec{MA'}) \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{AA'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

$$= 0 \text{ car } \vec{AA'} \wedge \vec{F} \perp \vec{AA'}$$

donc nulle

$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u}$ ne dépend pas du point choisi sur Δ

$M_\Delta(\vec{F})$ est le moment / à un axe



Propriétés : Si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

1) Si D (droite support de $\vec{F}$, passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) en un point I, alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

2) Si (D) // (Δ), alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

démo 1

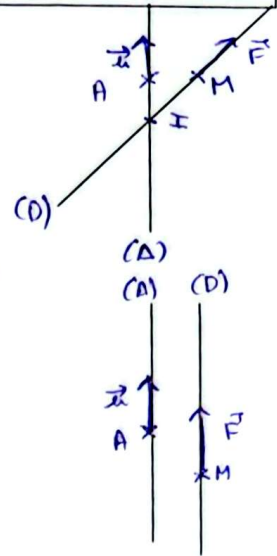
$$\begin{aligned} M_{\Delta}(\vec{F}) &= \vec{MA} \wedge \vec{F} \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{AI} \wedge \vec{IF}) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{AI} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \quad \text{car } \vec{AI} \text{ et } \vec{F} \\ &\quad \text{sont //} \end{aligned}$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

démo 2

$$\begin{aligned} M_{\Delta}(\vec{F}) &= (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &\quad \perp \vec{F} \text{ donc } \perp \vec{u} \\ &\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}) = 0 \end{aligned}$$

Si (D) et (Δ) sont dans le m plan,
 $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$



c) Application

Propriété : $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F$ où d est le bras de levier (distance à l'axe).

(Δ) $\perp$ plan ($\vec{AM}$, $\vec{F}$)

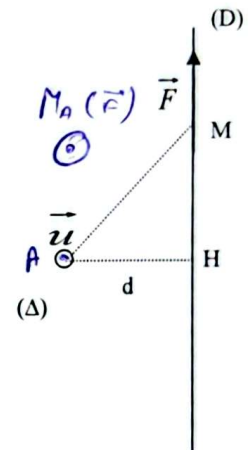
$$\begin{aligned} M_{\Delta}(\vec{F}) &= \vec{MA} \wedge \vec{F} \cdot \vec{u} = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &= ((\vec{AH} + \vec{HM}) \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{AH} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} + (\vec{HM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &\quad \text{car } \vec{HM} \parallel \vec{F} \end{aligned}$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = d \cdot \|\vec{F}\| \quad \text{ds le cas du dessin}$$

si $\vec{u}$ est à l'envers, $M_{\Delta}(\vec{F}) = -d \|\vec{F}\|$

d "le bras de levier" = distance à l'axe

$|M_{\Delta}(\vec{F})| \nearrow$ si d $\nearrow$



- * Pour démonter l'roue, utiliser une grande croix plutôt qu'une petite manivelle
- * Pour ouvrir une porte, la poignée doit être le + éloignée de l'axe de rotation

Rq :

Ces résultats s'appliquent à une force quelconque en la décomposant en une force coplanaire et une force non coplanaire à Δ : $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$. On a alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F_{\perp}$.

$\vec{F}_{//}$ coplanaire
 $\vec{F}_{\perp}$ non coplanaire