

Résumé de cours Mécanique MC5 Loi du moment cinétique. Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe

Produit scalaire $w = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

Produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :
 $\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}, \vec{v}$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct.
 $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha|$
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Moment au point A d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M: $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$

Moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M, par rapport à un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{M}_A \cdot \vec{u} = \|\vec{M}_A\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{M}_A)$$

Propriétés : M_{Δ} a même valeur en tout point de l'axe Δ . $\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{M}_A(\vec{F})$

Si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $M_{\Delta} = 0$:

1) Si D (droite support de $\vec{F}$, passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) en un point I, alors $M_{\Delta} = 0$.

2) Si (D) // (Δ), alors $M_{\Delta} = 0$.

Application : $M_{\Delta} = \pm d \cdot F$ où d est le bras de levier (distance à l'axe).

Couple : Action menée sur un système, telle que la force résultante soit nulle. Un couple ne déplace pas le centre d'inertie d'un système, mais tend à le faire tourner.

Liaison pivot : Mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe Δ .

On n'a donc pas de translation suivant Δ .

Liaison pivot idéale : $M_{\Delta}(\text{liaison}) = 0$. On néglige les frottements (en utilisant des roulements à bille ou à aiguille).

Moment cinétique au point A du point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Moment cinétique par rapport à l'axe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) : $L_{\Delta}(M/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(M) \cdot \vec{u}$

Propriétés : L_{Δ} a même valeur en tout point de l'axe Δ .

Si D (droite support de $\vec{v}$, passant par M), passe par A, alors $\vec{L}_A = \vec{0}$.

Si D (droite support de $\vec{v}$, passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) ou si (D) // (Δ), c'est-à-dire si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $L_{\Delta} = 0$.

Théorème du moment cinétique pour un point matériel M(m)

- en un point fixe A, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen : $\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F})$

- par rapport à un axe fixe Δ , dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen : $\frac{dL_{\Delta}(M/\mathcal{R})}{dt} = M_{\Delta}(\vec{F})$

Application au pendule simple

Théorème du moment cinétique pour un système de points matériels $S = \{M_i (m_i)\}$

- en un point fixe A, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_A(Syst/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_{Aext}$$

- par rapport à Δ axe fixe, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen : $\frac{dL_{\Delta}(Syst/\mathcal{R})}{dt} = M_{\Delta}ext$

Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (Oz)$

Moment cinétique scalaire d'un solide

$L_{\Delta}(S/\mathcal{R}) = \sum_i L_{\Delta}(M_i) = J_{\Delta}\omega$ où $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ
Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen $\frac{dL_{\Delta}(S/\mathcal{R})}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta} \text{ext}$

Application au pendule pesant (à connaître).

Approche énergétique des solides**1.) Théorèmes généraux**

Pour un système quelconque :

Théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}$ galiléen $E_c(t_2) - E_c(t_1) = W(\vec{F}_{int}) + W(\vec{F}_{ext})$

Théorème de la puissance cinétique dans $\mathcal{R}$ galiléen $\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_{int}) + P(\vec{F}_{ext})$

Théorème de l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}$ galiléen

$$E_m(t_2) - E_m(t_1) = W(\vec{F}_{nc\ int}) + W(\vec{F}_{nc\ ext}) \quad (\vec{F}_{nc} \text{ forces non conservatives})$$

Théorème de la puissance mécanique dans $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_{nc\ int}) + P(\vec{F}_{nc\ ext})$$

Pour un solide :

$$P_{int} = 0 \text{ et } W_{int} = 0$$

2.) Energies**a) Energie cinétique**

Pour un système de points $E_c(Syst/\mathcal{R}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Pour un solide en translation $E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m v_G^2$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe $E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$

b) Energie potentielle de pesanteur $E_{pp}(S) = mgz_G + cste$

3.) Puissance des actions sur un solide

a) Solide en translation $P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_G$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème de la puissance cinétique : dans $\mathcal{R}$ galiléen, $\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} = M_{\Delta ext} \cdot \omega$

Exemple : Tabouret d'inertie (à connaître)

