

Mécanique MC5 Loi du moment cinétique.

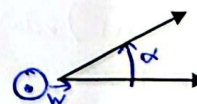
Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Produit scalaire	1
Produit vectoriel.....	1
I Moment d'une force	2
1.) Point matériel.....	2
2.) Système de points matériels Syst = {M _i (m _i)}	4
II Moment cinétique.....	5
1.) Définition.....	5
2.) Théorème du moment cinétique	6
3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ = (Oz)	7
III Approche énergétique des solides.....	10
1.) Théorèmes généraux.....	10
2.) Energies	10
3.) Puissance des actions sur un solide.....	10
IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations	11
1.) Principe.....	11
2.) Mise en oeuvre.....	11
Conclusion : Tabouret d'inertie	12



Produit scalaire $w = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

Produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :
 $\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}, \vec{v}$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct.
 $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha|$
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires



Règle de la main droite (ou du tire bouchon)
 On tourne de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, le pouce indique $\vec{w}$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

I Moment d'une force

1.) Point matériel

a) Moment au point A d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M :

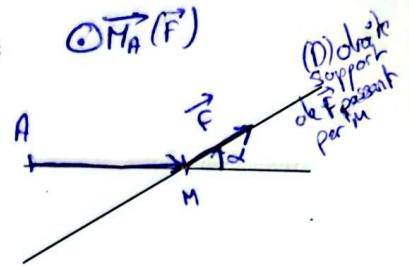
$$\|\vec{M}_A(\vec{F})\| = \|\vec{AM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin \alpha|$$

$$N \cdot m \text{ ou } kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = \text{Joule } J$$

$(\vec{AM}, \vec{F}, \vec{M}_A(\vec{F}))$ sens direct

Rq: si $\vec{AM}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires
cad si $A \in (D)$, $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0}$

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$



b) Moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M, par rapport à un axe Δ :

Définition : Soit un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$: $M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \|\vec{M}_A(\vec{F})\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{M}_A)$
(produit scalaire commutatif) Nom $\vec{u}$ vect. directeur $\|\vec{u}\| = 1$

Propriétés : $\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{M}_A(\vec{F})$ $M_\Delta(\vec{F})$ a même valeur en tout point de l'axe Δ . (démonstration à connaître)

$M_\Delta(\vec{F}) > 0$ ou < 0 suivant l'orientation de Δ

(cad le sens de $\vec{u}$)

$M_\Delta(\vec{F})$ est le projeté orthogonal de $\vec{M}_A(\vec{F})$ sur l'axe Δ orienté par $\vec{u}$

Rq: si $\vec{M}_A(\vec{F}) \perp \Delta(\vec{u})$, $M_\Delta(\vec{F}) = 0$

démon: $(A, A') \in (\Delta)$



$$\vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} - \vec{M}_{A'}(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$= (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} - (\vec{A'M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$= (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} + (\vec{MA'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$= ((\vec{AM} + \vec{MA'}) \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

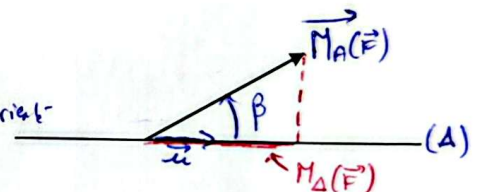
$$= (\vec{AA'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$= 0 \text{ car } \vec{AA'} \wedge \vec{F} \perp \vec{AA'}$$

donc $\perp \vec{u}$
donc nulle

$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u}$ ne dépend pas du point choisi sur Δ

$M_\Delta(\vec{F})$ est le moment / à un axe



Propriétés : Si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

1) Si D (droite support de $\vec{F}$, passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) en un point I, alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

2) Si (D) // (Δ), alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.

démo 1

$$\begin{aligned} M_{\Delta}(\vec{F}) &= \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{IM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \quad \text{car } \vec{IM} \text{ et } \vec{F} \\ &\quad \text{sont //} \end{aligned}$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

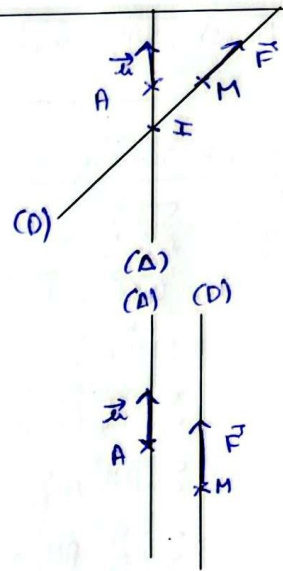
démo 2

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$\perp \vec{F} \text{ donc } \perp \vec{u}$

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

Si (D) et (Δ) sont dans le même plan,
 $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$



c) Application

Propriété : $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F$ où d est le bras de levier (distance à l'axe).

(Δ) $\perp$ plan (AM, $\vec{F}$)

$$\begin{aligned} M_{\Delta}(\vec{F}) &= \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{AH} + \vec{HM}) \wedge \vec{F} \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{AH} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} + (\vec{HM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ &\quad \text{car } \vec{HM} \parallel \vec{F} \end{aligned}$$

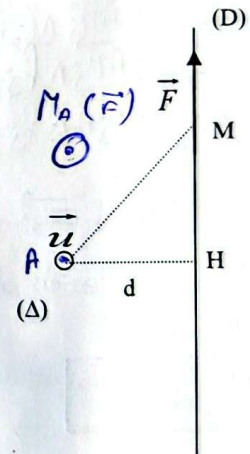
$$M_{\Delta}(\vec{F}) = d \cdot \|\vec{F}\| \quad \text{de le cas du dessin}$$

si $\vec{u}$ est à l'envers, $M_{\Delta}(\vec{F}) = -d \cdot \|\vec{F}\|$

d "le bras de levier" = distance à l'axe

$|M_{\Delta}(\vec{F})| \nearrow$ si $d \nearrow$

- * Pour démonter une roue, utiliser une grande croix plutôt qu'une petite manivelle
- * Pour ouvrir une porte, la poignée doit être le + éloignée de l'axe de rotation



Rq:

Ces résultats s'appliquent à une force quelconque en la décomposant en une force coplanaire et une force non coplanaire à Δ : $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$. On a alors $M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm d \cdot F_{\perp}$.

$\underbrace{\vec{F}_{//}}_{\text{coplanaire}} \quad \underbrace{\vec{F}_{\perp}}_{\text{non coplanaire}}$

2.) Système de points matériels Syst = $\{M_i (m_i)\}$

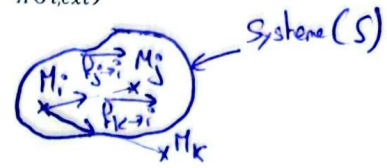
a) Moments intérieurs et extérieurs

Moment résultant des forces intérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,int} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \vec{0}$

Moment résultant des forces extérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,ext} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,ext})$

• M_i est soumis à des forces $\vec{P}_{j \rightarrow i}$ exercées par $M_j \in \text{Syst}$

• $\vec{P}_{k \rightarrow i}$ exercées par $M_k \notin \text{Syst}$



Force intérieure à laquelle est soumis M_i

$$\begin{aligned}\vec{P}_{i,int} &= \sum_{j \neq i} \vec{P}_{j \rightarrow i} \\ \vec{M}_A(\vec{P}_{i,int}) &= \vec{AM}_i \wedge \vec{P}_{i,int} \\ &= \vec{AM}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{P}_{j \rightarrow i} \\ \vec{M}_{A,int} &= \sum_i \vec{M}_A(\vec{P}_{i,int}) \\ &= \sum_i \vec{AM}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{P}_{j \rightarrow i} \\ &= \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{P}_{j \rightarrow i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& * \vec{AM}_i \wedge \vec{P}_{j \rightarrow i} + \vec{AM}_j \wedge \vec{P}_{i \rightarrow j} \\ &= \vec{AM}_i \wedge \vec{P}_{j \rightarrow i} + \vec{AM}_j \wedge (-\vec{P}_{j \rightarrow i}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{principe d'interaction} \\ \text{réciproque} \end{array} \right\} \\ &= \vec{AM}_i \wedge \vec{P}_{j \rightarrow i} - \vec{AM}_j \wedge \vec{P}_{j \rightarrow i} \\ &= \vec{AM}_i \wedge \vec{P}_{j \rightarrow i} + \vec{M_j A} \wedge \vec{P}_{j \rightarrow i} \\ &= \vec{M_j M_i} \wedge \vec{P}_{j \rightarrow i} \\ &= \vec{0} \text{ car } \vec{M_j M_i} \text{ et } \vec{P}_{j \rightarrow i} \text{ collinéaires}\end{aligned}$$

Dans $\vec{M}_{A,int}$, les éléments de la somme s'annulent 2 à 2

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_{A,int} = \vec{0}}$$

b) Notion de couple

Couple : Action menée sur un système, telle que la force résultante soit nulle;

Un couple ne déplace pas le centre d'inertie d'un système, mais tend à le faire tourner.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Moment résultant au point O

$$\begin{aligned}\vec{J}_O &= \vec{J}_O(\vec{F}_1) + \vec{J}_O(\vec{F}_2) \\ &= \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_2 \quad \left. \begin{array}{l} \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \end{array} \right\} \\ &= \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 - \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_1 \\ &= \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{A_2 O} \wedge \vec{F}_1 \\ \vec{J}_O &= \vec{A_2 A_1} \wedge \vec{F}_1\end{aligned}$$

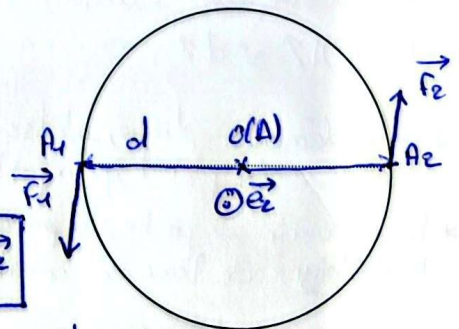
$(\vec{A_2 A_1}, \vec{F}_1, \vec{J}_O)$ trièdre direct

On tourne de $\vec{A_2 A_1}$ vers $\vec{F}_1$, le pouce indique $\vec{J}_O$

$$\boxed{\vec{C} = \vec{J}_O = d \times \|\vec{F}_1\| \vec{e}_z}$$

couple

Ne dépend pas de la position de O



c) Liaison pivot : Mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe Δ .
On n'a donc pas de translation suivant Δ .

Liaison pivot idéale : $M_{\Delta}(\text{liaison}) = 0$. On néglige les frottements (en utilisant des roulements à bille ou à aiguille).

En l'absence de frottements

$$\vec{R}_T = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}_N} \perp \text{à la surface de contact}$$

(D) droite support de $\vec{R}_N$ coupe (A) axe de rotation du rotor $\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{R}_N) = 0$
(cf démo p3) $\forall$ point de contact

$$\Rightarrow \boxed{M_{\Delta}(\text{liaison}) = 0 \text{ pour une liaison parfaite}}$$

surface de contact entre le rotor et le stator

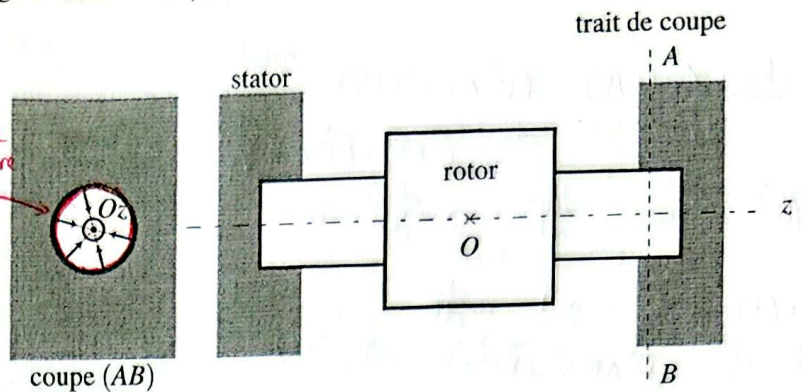


Figure 19.7 - Schéma de principe d'une liaison pivot.

*** II Moment cinétique défini en analogie aux forces

1.) Définition

a) pour un point matériel

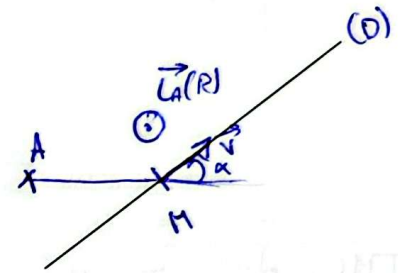
Moment cinétique au point A du point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

$$(\vec{AM}, \vec{v}, \vec{L}_A) \text{ triède direct} \quad \|\vec{L}_A(M/\mathcal{R})\| = \|\vec{AM}\| \times m \|\vec{v}\| \times |\sin \alpha|$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{kg.m} & \text{s}^{-1} & \text{m.s}^{-1} \\ \text{kg.m}^2 & \text{s}^{-1} & \end{matrix}$

Moment cinétique par rapport à l'axe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) : $L_{\Delta}(M/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(M) \cdot \vec{u}$
 $L_{\Delta}(M)$ est la projection de $\vec{L}_A(M)$ sur $\Delta(M, \vec{u})$



Propriété : $L_{\Delta}(M)$ a même valeur en tout point de l'axe Δ .

Propriétés : Si D (droite support de $\vec{v}$, passant par M), passe par A, alors $\vec{L}_A(M) = \vec{0}$.
Si D (droite support de $\vec{v}$ passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$)
ou si (D) // (Δ), c'est-à-dire si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $L_{\Delta}(M) = 0$.

m démo que pour le moment d'une force

b) pour un système de points matériels $\text{Syst} = \{M_i(m_i)\}$:

$$\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R})$$

2.) Théorème du moment cinétique

a) pour un point matériel $M(m)$ Théorème du moment cinétique en un point fixe A , dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F}) \quad \text{mcs} \quad \text{où } \vec{F} \text{ est la résultante des forces appliquées}$$

démo $\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})$

$$\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d\vec{AM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{AM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

• $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$ $\frac{d\vec{AM}}{dt} = 0 + \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}$
car A et O sont fixes

• LFD dans $\mathcal{R}$ gal $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{AM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_A(\vec{F})$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe Δ , dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{dL_\Delta(M/\mathcal{R})}{dt} = M_\Delta(\vec{F}) \quad \text{où } \vec{F} \text{ est la résultante des forces appliquées}$$

démo TMC: $\frac{dL_\Delta(M/\mathcal{R})}{dt} \cdot \vec{x} = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{x}$ Δ fixe, de vecteur unitaire $\vec{x}$ est
 $\Rightarrow \frac{d(\vec{L}_A \cdot \vec{x})}{dt} = M_\Delta(\vec{F})$

b) pour un système de points matériels $\text{Syst} = \{M_i(m_i)\}$:Théorème du moment cinétique en A point fixe, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R})}{dt} = \vec{M}_{A\text{ext}} \quad (\text{moment résultant des forces extérieures au système au point A})$$

démo TMC à 1 point M_i en 1 point A FIXE de $\mathcal{R}_{\text{gal}}$

$$\frac{d\vec{L}_A(M_i/\mathcal{R})}{dt} = \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{i,\text{int}} + \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{i,\text{ext}}$$

$$\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/\mathcal{R})$$

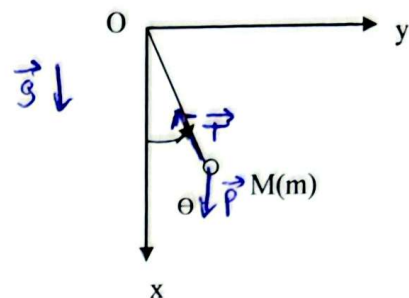
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_A(\text{Syst}/\mathcal{R})}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{L}_A(M_i/\mathcal{R})}{dt} \\ &= \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{i,\text{int}} + \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_{i,\text{ext}} \\ &= \vec{M}_{A,\text{ext}} \end{aligned}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à Δ axe fixe, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{dL_\Delta(\text{Syst}/\mathcal{R})}{dt} = M_\Delta \text{ext} \quad (\text{moment résultant des forces extérieures au système par rapport à l'axe})$$

démo 2 m démo que pour 1 point ($\vec{x}$) sur le th précédent

c) Application au pendule simple



Syst: $\{M(m)\}$; Ref: terrestre galiléen

Forces: $\vec{T}$
 $\vec{P} = m\vec{g}$

TMC en O FIXE $\frac{dL_0(M/O)}{dt} = \mathcal{M}_0(\vec{P}) + \mathcal{M}_0(\vec{T})$

$\mathcal{M}_0(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{OM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires

$\mathcal{M}_0(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P}$ $\vec{OM} = l\vec{e}_r$ $\vec{P} = m\vec{g}$

On tourne de $\vec{OM}$ vers $\vec{P}$, le pouce indique $(-\vec{e}_z)$

$\mathcal{M}_0(\vec{P})$ est suivant $(-\vec{e}_z)$

$\mathcal{M}_0(\vec{P}) = mgl \sin \theta (-\vec{e}_z)$

$L_0(M/O) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$\vec{OM} = l\vec{e}_r$ $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$L_0(M/O) = l^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

$\frac{dL_0(M/O)}{dt} = l^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z$

TMC: $m l^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z = -mgl \sin \theta \vec{e}_z$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$

Petites oscillations $\sin \theta \approx \theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$

Oscillateur harmonique: $\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pulsation propre

$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (Oz)$

a) Moment cinétique scalaire d'un solide

$L_\Delta(S/R) = \sum_i L_\Delta(M_i) = J_\Delta \omega$ où $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ

M_i décrit un cercle autour de Δ

$\vec{OM}_i = \vec{OH}_i + \vec{H}_i M_i = z_i \vec{e}_z + r_i \vec{e}_r$

$\vec{v}_i = \frac{d\vec{OM}_i}{dt} = r_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

M_i point $\in$ solide $|r_i| = \text{cste}$
 $|z_i| = \text{cste}$

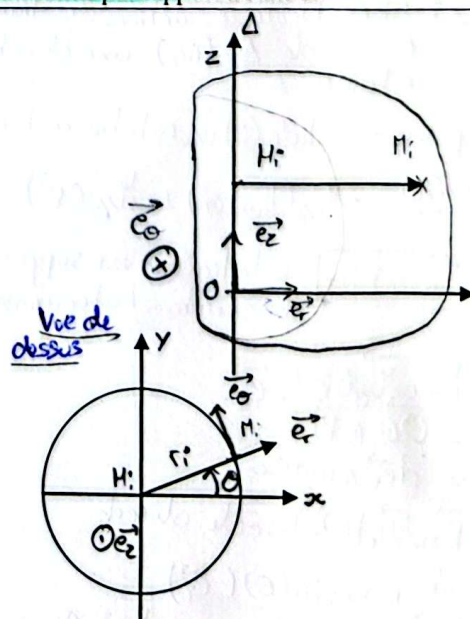
$L_0(M_i) = \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$
 $= (z_i \vec{e}_z + r_i \vec{e}_r) \wedge m_i r_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
 $= m_i r_i z_i \dot{\theta} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta) + m_i r_i^2 \dot{\theta} (\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta)$
 $= m_i r_i z_i \dot{\theta} \vec{e}_r + m_i r_i^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

$L_\Delta(M_i) = L_0(M_i) \cdot \vec{e}_z = m_i r_i^2 \dot{\theta}$

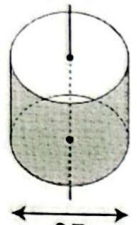
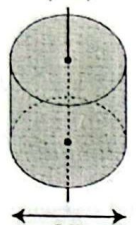
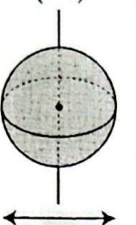
$L_\Delta(Syst) = \sum_i L_\Delta(M_i) = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}$ $\boxed{\dot{\theta} = \omega}$

$L_\Delta(Syst) = \omega \sum m_i r_i^2$

$L_\Delta(Syst) = J_\Delta \omega$ où $\boxed{J_\Delta = \sum m_i r_i^2}$



Exemples : Les moments d'inertie ne sont pas à connaître

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
(Oz)	(Oz)	(Oz)	(Oz)
			

b) Théorème du moment cinétique pour un solide S en rotation autour d'un axe fixe

Hypothèse : Δ axe fixe, dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen $\frac{dL_{\Delta}(S/\mathcal{R})}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta} \text{ext}$
 où $M_{\Delta} \text{ext}$ est le moment résultant des forces extérieures au solide par rapport à l'axe
 $L_{\Delta}(S/\mathcal{R}) = J_{\Delta} \omega$ et $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ

$L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega$ $\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \frac{d(J_{\Delta} \omega)}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt}$ si le système est un solide, J_{Δ} cst

c) Application au pendule pesant

Syst : {Solide}; Ref : terrestre gal

Forces : • Résultante des actions de liaison au niveau de $\Delta = (Oz)$ axe de rotation
 • Poids

TMC pour 1 solide (s) en rotation autour d'un axe fixe

$$\frac{dL_{\Delta}(S/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\text{liaison}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P})$$

$\mathcal{M}_{\Delta}(\text{liaison}) = 0$ si la liaison est supposée parfaite (sans frottement et uniquement la rotation)

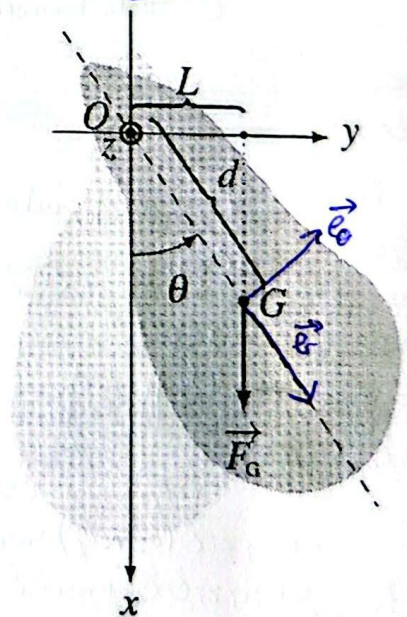
$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \mathcal{M}_O(\vec{P}) \cdot \vec{e}_z$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = d\vec{e}_r \wedge mg\vec{e}_z$$

$(\vec{OG}, \vec{P}, \mathcal{M}_O(\vec{P}))$ triède direct

$$\mathcal{M}_O(\vec{P}) = dx mg \sin(\theta) (-\vec{e}_z)$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = \mathcal{M}_O(\vec{P}) \cdot \vec{e}_z = -mgd \sin \theta$$



TMC appliqué au solide de $\mathcal{R}_{\text{sol}}$

$$\frac{dL_A(S/\mathcal{R})}{dt} = M_{A, \text{ext}} = 0 \quad M_A(\vec{P})$$

$$L_A = J_A \omega \quad \text{où } J_A = \text{cte}$$

$$\frac{L_A(S/\mathcal{R})}{dt} = J_A \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{TMC} \Rightarrow J_A \frac{d\omega}{dt} = -mgd \sin \theta$$

$$\omega = \dot{\theta} \Rightarrow J_A \ddot{\theta} = -mgd \sin \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_A} \sin \theta = 0$$

eqa diff de l'oscillateur

→ Approximation petites oscillations $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_A} \theta \approx 0$$

Oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta \approx 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_A}}$$

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{indep. des CI}$$

ISOCHRONISME des petites oscillations

Rq : Intégrale première du mvt

$$J_A \ddot{\theta} = -mgd \sin \theta \quad \text{où } \theta(t)$$

$$\Rightarrow J_A \ddot{\theta} \dot{\theta} = -mgd \sin(\theta) \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 = +mgd \cos \theta + \text{cte}$$

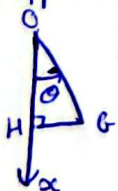
On a obtenu une primitive

$$\Rightarrow \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 - mgd \cos \theta = \text{cte}$$

Expression cste, indépendante de la position et la vitesse
Correspond à une conservation de l'Em

$$(E_{pp} = +mgz + \text{cte} \quad \uparrow \vec{e}_z)$$

$$[E_{pp} = -mgz_0 + \text{cte}] \quad \downarrow \vec{e}_x$$



$$|x_0| = OH = d \cos \theta$$

$$\text{Donc } E_c = \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2$$

Voir démo p. 10.

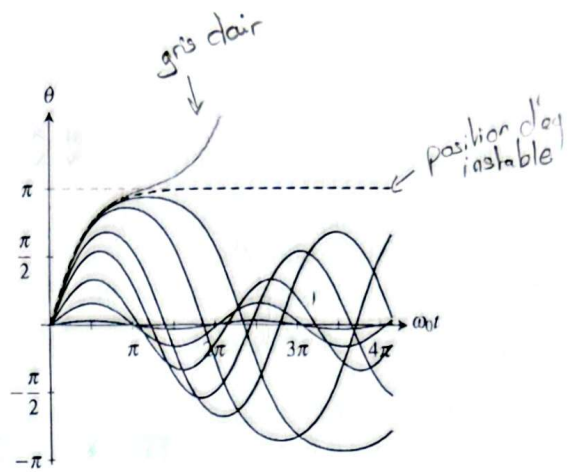


Figure 19.11 - Évolution temporelle de l'angle θ : en trait continu noir, les mouvements sont pendulaires ; en trait continu gris, il est révolutif. Les pointillés correspondent à la transition entre ces deux régimes.

- mvt pendulaire = oscillatoire pour de petites vitesses initiales
- mvt révolutif : le pendule tourne toujours de le m sens : $\theta \rightarrow +\infty$ pour une vitesse + grande
- en fait, $\theta \rightarrow \pi$ position d'équilibre instable
- $\Rightarrow$ Pour les 2 courbes correspondant aux + petites vitesses initiales - T_0 indépendant de $\dot{\theta}$

III Approche énergétique des solides

1.) Théorèmes généraux

Pour un système quelconque :

Théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}$ galiléen $E_c(t_2) - E_c(t_1) = W(\vec{F}_{int}) + W(\vec{F}_{ext})$

Théorème de la puissance cinétique dans $\mathcal{R}$ galiléen $\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_{int}) + P(\vec{F}_{ext})$

Théorème de l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}$ galiléen

$$E_m(t_2) - E_m(t_1) = W(\vec{F}_{nc\ int}) + W(\vec{F}_{nc\ ext}) \quad (\vec{F}_{nc} \text{ forces non conservatives})$$

Théorème de la puissance mécanique dans $\mathcal{R}$ galiléen

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_{nc\ int}) + P(\vec{F}_{nc\ ext})$$

Pour un solide :

$$P_{int} = 0 \text{ et } W_{int} = 0$$

2.) Energies

a) Energie cinétique

Pour un système de points

$$E_c(\text{Syst}/\mathcal{R}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Pour un solide en translation

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m v_G^2$$

Un solide $v_i = v_G$ $E_c(\text{solide}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_G^2 \sum_i m_i$ avec $m = \sum_i m_i$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

$$v_i = r_i \cdot \dot{\theta} = r_i \cdot \omega$$

$$E_c(\text{solide}) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_c(\text{solide}) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

b) Energie potentielle de pesanteur

$$E_{pp}(S) = mgz_G + \text{cste}$$

$$E_{pp}(S) = \sum_i E_{pp}(M_i) = \sum_i m_i g z_i + \text{cste} \quad \uparrow \vec{e}_z$$

$$= g \times \left(\sum_i m_i z_i \right) + \text{cste}$$

$$\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OM}_i}{\sum_i m_i} \quad \text{def de } G \quad \text{où } m = \sum_i m_i$$

on projette sur $\uparrow \vec{e}_z$ $z_G = \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \Rightarrow m z_G = \sum_i m_i z_i$

$$\text{d'où } E_{pp}(S) = g m z_G + \text{cste}$$

3.) Puissance des actions sur un solide

a) Solide en translation

$$P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_G$$

$$v_i, \vec{v}_i = \vec{v}_G$$

$$\text{d'où } P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_G$$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème de la puissance cinétique : dans $\mathcal{R}$ galiléen, $\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} = M_{\Delta ext} \cdot \omega$

TMC appliqué à 1 solide en rotation / axe fixe Δ de $\mathcal{R}_{gal}$

$$L_\Delta = J_\Delta \omega$$

$$\Rightarrow \frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta ext}$$

$$\Rightarrow J_\Delta \omega \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta ext} \omega$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \right) = M_{\Delta ext} \cdot \omega$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = P_{ext} \quad \text{cf TMC}$$

$$\text{où } P_{ext} = M_{\Delta ext} \cdot \omega$$

Th de la puissance cinétique

IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations

1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{où } \omega_0^2 = \frac{mg}{L} \quad \left| \text{Donc } \dot{\theta}_k = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{h} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\theta \quad \left| \Rightarrow \dot{\theta}_{k+1} = h \dot{\theta}_k + \theta_k \right. \quad (2)$$

$$\text{pos } h = t_{k+1} - t_k \Rightarrow t_{k+1} = t_k + h \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{h}$$

$$\left| \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\dot{\theta}_{k+1} - \dot{\theta}_k}{h} = \ddot{\theta}_k \right.$$

$$\left| \Rightarrow \dot{\theta}_{k+1} = \dot{\theta}_k + h \ddot{\theta}_k \right.$$

$$\text{IED} \Rightarrow \dot{\theta}_{k+1} = \dot{\theta}_k + h (-\omega_0^2 \sin\theta_k) \quad (3)$$

2.) Mise en oeuvre

MC5 étude du pendule pesant : non isochronisme des oscillations

résolution par la méthode d'Euler

#importation des bibliothèques

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

#définition de la fonction pendule pesant

#on veut résoudre l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements

#t varie entre a et b

#x=theta et v=x'=theta'

#wo=sqrt(mgd/J)=1rad/s=omega

def pendulepesant(a,b,xo,vo,omega,n):

h=(b-a)/n

t,x,v=a,xo,vo

les_t, les_x, les_v = [], [], []

for k in range(n):

t=t+h

x=x+h*v

v=v-omega**2*np.sin(x)*h

les_t.append(t)

les_x.append(x)

les_v.append(v)

return(les_t,les_x,les_v)

#tracé des courbes :

#tracer les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de vo comprises 0 et 3 rad/s

n=10000

les_vo=np.linspace(0,3,10)

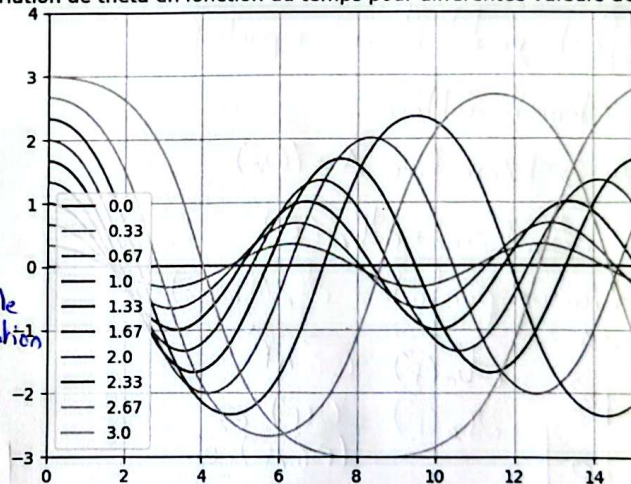
for k in range(10):

les_t, les_x, les_v = pendulepesant(0,15,0,les_vo[k],1,n)

plt.plot(les_t, les_x, label=str(round(les_vo[k],2)))

plt.axis([0,15,-3,10])

Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0



```
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de (dtheta/dt)0")
plt.figure()
```

#tracer sur un nouveau graphe les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de x0 comprises 0 et 3 rad

```
les_x0 = np.linspace(0, 3, 10)
for k in range(10):
    les_t, les_x, les_v = pendule_pesant(0, 15, les_x0[k], 0, 1, n)
    plt.plot(les_t, les_x, label = str(round(les_x0[k], 2)))
```

```
plt.axis([0, 15, -3, 4])
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0")
plt.show()
```

Conclusion : Tabouret d'inertie

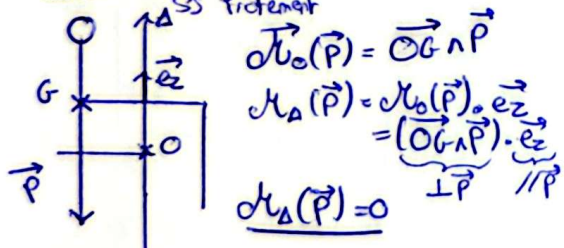
Syst {cobaye + ^{tabouret} tournante + poids}

Ref : terrestre galiléen

TMC au syst / axe fixe $\Delta = (Oz)$

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta} \text{ liaison} + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P})$$

Hyp: Liaison parfaite $\Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\text{liaison}) = 0$



$$\begin{aligned}\vec{L}_{\Delta}(\vec{P}) &= \vec{OG} \wedge \vec{P} \\ \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) &= \mathcal{M}_O(\vec{P}) \cdot \vec{e}_z \\ &= (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e}_z \\ &= \underbrace{(\vec{OG} \wedge \vec{P})}_{\perp \vec{P}} \cdot \underbrace{\vec{e}_z}_{// \vec{P}}\end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0$$

Rq: En pratique, on essaie d'avoir G sur l'axe (Δ) pour avoir un solide "équilibré" en rotation

$$\text{TMC: } \frac{dL_{\Delta}}{dt} = 0 \Rightarrow L_{\Delta} = \text{cte}$$

$$L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega \text{ où } J_{\Delta} = \sum m_i r_i^2$$

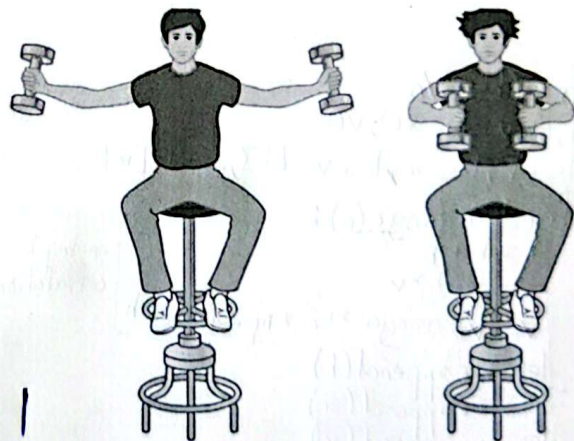
où r_i : distance de m_i à Δ

Figure de gauche : bras écartés J_e
Figure de droite : bras serrés J_s

$$L_{\Delta} = J_e \omega_e = J_s \omega_s$$

$$\Rightarrow \omega_s = \frac{J_e}{J_s} \omega_e \quad J_e > J_s \Rightarrow \omega_s > \omega_e$$

$\Rightarrow$ Vitesse de rotation + grande à droite



Variation d'énergie cinétique

$$\text{Th de l'Ec } \Delta E_c = W_{\text{int}}$$

$$\text{Th de la puissance cin: } \frac{dE_c}{dt} = P_{\text{int}}$$

Où W_{int} est apporté par les muscles du cobaye quand il rapproche les poids de Δ

Ce n'est pas 1 solide $\Rightarrow$ travail des forces extérieures