
PROGRAMMES 19 et 20.

PROGRAMME 19 : du 09/03 au 13/03

ESPACES VECTORIELS

Dans tout le chapitre, K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ Structure de K -espace vectoriel. Premiers exemples de référence : K^n , $K^X = \mathcal{F}(X, K)$ (cas particulier des suites) et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Règles de calcul.
- ★ Sous-espace F d'un K -espace vectoriel E ($F \subset E$, $F \neq \emptyset$, F stable par combinaison linéaire). L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ est un sev de E et est appelé sous-espace engendré par $u_1, \dots, u_n$. Notation $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Intersection de sous-espaces vectoriels.
- ★ Somme de deux sous-espaces vectoriels. Notation $F+G$. Somme directe (la somme est dite directe lorsque la décomposition selon $F+G$ est unique). Notation $F \oplus G$. Caractérisation par $F \cap G = \{0_E\}$. Sous-espaces supplémentaires. $E = F \oplus G \iff \forall u \in E, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w$.
- ★ Applications linéaires : définition, endomorphismes, formes linéaires, isomorphismes, automorphismes. Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composée. Notations $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$, $\text{GL}(E)$. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Composée d'isomorphismes. Puissances d'endomorphismes. Notation f^n pour $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in \text{GL}(E)$, notation f^{-n} pour $n \in \mathbb{N}^*$ (désigne indifféremment $(f^{-1})^n$ et $(f^n)^{-1}$). Formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$.
- ★ Image directe d'un sous-espace vectoriel, tiré en arrière d'un sev. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau. Savoir traduire $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ à l'aide d'un noyau et d'une image. Cas particulier : $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Famille génératrice de $\text{Im}(f)$ quand l'espace de départ admet une famille génératrice $(u_1, \dots, u_n)$.
- ★ Projecteurs et symétries associés à deux sev supplémentaires. Caractérisations par $p \circ p = p$ et $s \circ s = \text{id}_E$ et p et s sont des endomorphismes de E .

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- ❑ Donner des exemples de référence de K -ev.
- ❑ Définition d'un sev d'un K -ev E . Donner des exemples de sev d'ev de référence.
- ❑ Définition du sev engendré par des vecteurs.
- ❑ Définition d'une somme de sev, d'une somme directe.
- ❑ Traductions de $E = F \oplus G$ ($1 : E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, $2 : \forall u \in E, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w$). L'unicité dans la décomposition correspond à $F \cap G = \{0_E\}$.
- ❑ Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme.
- ❑ Formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$.
- ❑ Définition du noyau, d'une image.
- ❑ Caractérisation de l'injectivité pour une application linéaire
- ❑ Signification de $f \circ g = 0$ si f et g endomorphismes d'un ev.
Cas particulier : $f \circ f = 0$.
- ❑ Famille génératrice de $\text{Im}(f)$ quand l'espace de départ admet une famille génératrice $(u_1, \dots, u_n)$.
- ❑ Définition d'une projection, d'une symétrie.
- ❑ Caractérisations d'une projection, d'une symétrie.

DÉMONSTRATIONS

- ❑ *Exemple fait en cours* : Dans $\mathbb{R}^3$ usuel, on note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0\}$, $G = \text{Vect}((1, 0, 1))$. F et G sont des sev supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
- ❑ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective ssi $\text{Ker } f = \{0_E\}$.
- ❑ Une projection de E est un endomorphisme de E .

REPRISE DES ESPACES VECTORIELS

POLYNÔMES : LE DÉBUT

Dans tout le chapitre, K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ L'ensemble $K[X]$: définition (un polynôme est une suite de coefficients). Notation $\sum_{k=0}^n a_k X^k$, X est la suite $(0, 1, \dots, 0, \dots)$. Opérations : somme, produit, composée. Structure de K -ev. Degré d'un élément de $K[X]$; coefficient dominant, polynôme unitaire. On convient que le degré de 0 est $-\infty$. Sous-espace vectoriel $K_n[X]$ des polynômes de degré au plus n . Degré d'une somme, d'un produit.
- ★ Divisibilité dans $K[X]$; diviseurs et multiples. Division euclidienne d'un élément A de $K[X]$ par un élément B de $K[X] \setminus \{0\}$.
- ★ Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racines (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité. Méthode de Horner pour l'évaluation d'une fonction polynomiale en α . Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P .

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- | | |
|---|---|
| ☐ Donner des exemples de référence de K -ev. | ☐ Caractérisation de l'injectivité pour une application linéaire |
| ☐ Définition d'un sev d'un K -ev E . Donner des exemples de sev d'ev de référence. | ☐ Signification de $f \circ g = 0$ si f et g endomorphismes d'un ev.
Cas particulier : $f \circ f = 0$. |
| ☐ Définition du sev engendré par des vecteurs. | ☐ Famille génératrice de $\text{Im}(f)$ quand l'espace de départ admet une famille génératrice $(u_1, \dots, u_n)$. |
| ☐ Définition d'une somme de sev, d'une somme directe. | ☐ Définition d'une projection, d'une symétrie. |
| ☐ Caractérisations des sev supplémentaires
(1 : $E = F \oplus G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, 2 : $\forall u \in E, \exists ! (v, w) \in F \times G, u = v + w$). | ☐ Caractérisations d'une projection, d'une symétrie. |
| ☐ Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme. | ☐ Théorème de la division euclidienne dans $K[X]$. |
| ☐ Formule du binôme dans $\mathcal{L}(E)$. | ☐ Définition d'une racine d'un polynôme. |
| ☐ Définition du noyau, d'une image. | ☐ Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul. |

DÉMONSTRATIONS

- *Exemple fait en cours* : Dans $\mathbb{R}^3$ usuel, on note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0\}$, $G = \text{Vect}((1, 0, 1))$. F et G sont des sev supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective ssi $\text{Ker } f = \{0_E\}$.
- **Exercice fait en cours** : Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sqrt[3]{n^2 + 1}$.