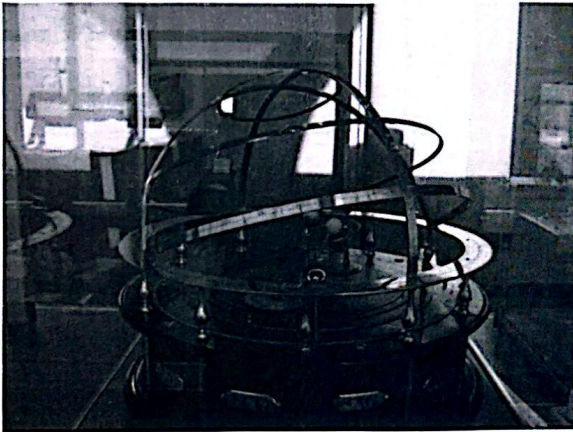


Mécanique MC6 Mouvements à force centrale

I Forces centrales conservatives.....	2
1.) Forces centrales.....	2
2.) Forces centrales conservatives.....	2
II Lois générales de conservation.....	3
1.) Conservation du moment cinétique.....	3
2.) Conservation de l'énergie mécanique.....	4
3.) Description des trajectoires pour les champs newtoniens.....	5
III Mouvement dans un champ gravitationnel.....	7
1.) Les trois lois de Kepler.....	7
2.) Vitesse de libération.....	7
3.) Etude d'un mouvement circulaire.....	8
4.) Satellites terrestres.....	9
IV Script python : Satellite soumis à la force d'interaction gravitationnelle, tracé des trajectoires.....	11
1.) Principe.....	11
2.) Mise en oeuvre.....	11



En astronomie, une **sphère armillaire**, aussi connue sous le nom d'*astrolabe sphérique*, est une modélisation basée sur la sphère céleste utilisée pour en montrer le mouvement apparent des étoiles autour de la Terre et du Soleil dans l'écliptique.

Mesurer la surchauffe en ville : Grâce à un suivi systématique par satellite des températures au sol, il sera possible de mieux planifier les constructions urbaines pour limiter l'effet d'îlot de chaleur. Sean Bailly 11 septembre 2022 | Pour la science N° 539
L'été 2022 aura été marqué par plusieurs vagues de chaleur intenses en Europe, mais aussi aux États-Unis et en Asie. Pour les spécialistes, ce phénomène serait amené à devenir plus fréquent et intense avec le changement climatique. La situation des villes est particulièrement préoccupante à cause de l'effet « îlot de chaleur urbain » : la minéralisation de l'espace public, l'activité humaine et la configuration des villes contribuent à accumuler encore plus de chaleur.

Pour suivre cet effet, l'ESA prépare la mission LSTM (*Land Surface Temperature Monitoring*), qui sera menée par le satellite du programme Copernicus *Sentinel-8* (qui devrait être opérationnel en 2029) et qui procédera à une mesure systématique des températures au sol, grâce à une caméra infrarouge. Afin de développer les outils d'analyse adaptés à cette nouvelle mission, les chercheurs ont utilisé les données de l'instrument de la Nasa Ecostress, installé à bord de la *Station spatiale internationale*, pour simuler les données de LSTM. Sa mission scientifique concerne la réponse de la biosphère à la disponibilité de l'eau. Les plantes régulent leur température par évapotranspiration. Mais si l'eau vient à manquer, leur température augmente.

Le futur satellite *Sentinel* aura une résolution spatiale de 50 mètres, comparable à celle d'Ecostress, et 400 fois supérieure aux deux satellites *Sentinel-3*, lancés en 2016 et 2018, dédiés à une mission océanographique et à la surveillance de la végétation sur les terres émergées.

Les relevés d'Ecostress pour Paris, Milan et Prague pour le 18 juin 2022, pendant une vague de chaleur, montrent par exemple que les espaces verts jouent un rôle crucial pour réduire les températures locales. L'objectif de LSTM est d'être un outil efficace pour la planification urbaine, afin de limiter l'effet d'îlot de chaleur urbain ou, pour les agriculteurs, afin d'optimiser la gestion de l'eau.

La constellation Starlink : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Starlink>

I Forces centrales conservatives

1.) Forces centrales

Définition : O point fixe dans $\mathcal{R}$ galiléen.

Le point matériel M(m) est soumis à une force centrale $\vec{F}$ de centre O, si à tout instant $\vec{F}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$:

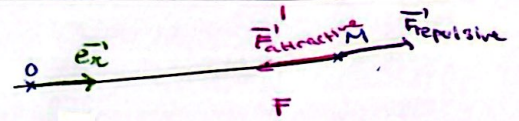
$$\vec{F} = F \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

F = val algébrique de $\vec{F}$.

$$F > 0$$

$$F < 0$$



Exemples : Ressort fixé en un point d'un plan, planète soumise à l'attraction d'un astre.

Hypothèses

On ne s'intéresse qu'aux forces telles que $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$

Cas particulier : interactions newtoniennes : $F(r) = -\frac{K}{r^2}$

- interaction gravitationnelle : m_0 fixe en O, m mobile en M.

$$\vec{F}_{m_0 \rightarrow m} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2} \quad K = G.m_0.m > 0$$

$$\vec{F}_{m_0 \rightarrow m} = m \vec{G}(M)$$

$\vec{G}$: champ de gravitation. G : cste de gravitation.

- interaction coulombienne : q_0 fixe en O, q mobile en M.

$$\vec{F}_{q_0 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \quad K = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}$$

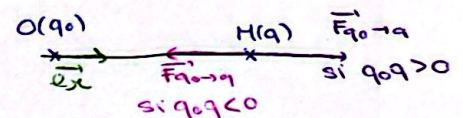
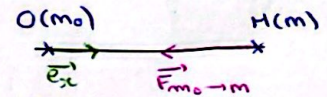
$$\vec{F}_{q_0 \rightarrow q} = q \vec{E}(M) \quad \text{champ électrostatique. } \epsilon_0 \text{ permittivité}$$

2.) Forces centrales conservatives

absolue du vide.

Rappel : Une force est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle, son travail ne dépend pas du chemin suivi.

$$\text{MCS : } W_{M \rightarrow N}(\vec{F}) = \int_M^N \vec{F} \cdot d\vec{l} = [E_p]_M^N \quad \text{ou} \quad \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$$



Propriété : Une force centrale de la forme $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$.

Pour un champ newtonien : $F(r) = -\frac{K}{r^2}$ d'où $E_p(r) = -\frac{K}{r} + \text{cste}$

- interaction gravitationnelle : $\vec{F}_{m_0 \rightarrow m} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$ $E_p(r) = -G \frac{m_0 m}{r}$ $K = G.m_0.m > 0$

- interaction coulombienne : $\vec{F}_{q_0 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{e}_r$ $E_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}$ $K = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}$

démo ***

$$\vec{F} = F(x)\vec{e}_x \Rightarrow \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F(x)\vec{e}_x \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \delta W = F(x) dx = -dE_p \Rightarrow \boxed{F(x) = -\frac{dE_p}{dx}} \quad \text{***}$$

Champ Newtonien

$$F(x) = -\frac{K}{x^2} = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = \frac{K}{x^2} \Rightarrow E_p = -\frac{K}{x} + \text{cste}$$

On choisit une ref pr les E_p

$$x \rightarrow +\infty, E_p \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{\text{cste} = 0}$$

II Lois générales de conservation

1.) Conservation du moment cinétique

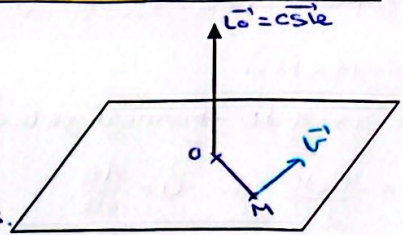
Hypothèse : Point matériel $M(m)$ soumis uniquement à une force centrale $\vec{F} = F\vec{e}_r$

Propriété : Pour un mouvement à force centrale, il y a conservation du moment cinétique.

demo

THC au point M ds R galiléen en 1 point O fixe.

$$\begin{aligned} \text{C.f. MCS : } \frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} &= \vec{J}_O(F) = \vec{OM} \wedge \vec{F} \\ &= \vec{OM} \wedge F\vec{e}_r \\ &= \vec{0} \text{ car } \vec{OM} \text{ et } \vec{e}_r \text{ st colinéaires.} \end{aligned}$$



$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O(M) = \vec{C} \text{ste}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p}(M|R) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M|R) = \vec{C} \text{ste}$$

$$\Rightarrow \forall t, \vec{OM} \perp \vec{L}_O \text{ et } \vec{v} \perp \vec{L}_O.$$

$\Rightarrow$ le movt se fait ds un plan passant par O et $\perp$ à $\vec{L}_O \text{ste}$.

à $t=0$, il contient $\vec{OM}_0$ et $\vec{v}_0$.

Conséquences :

1. Le mouvement est plan.

2. Le mouvement s'effectue suivant la loi des aires (deuxième loi de Kepler) :

Le rayon vecteur $\vec{OM}$ balaie des aires égales pendant des durées égales = la surface balayée est proportionnelle à la durée.

$$\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z \text{ où } C = \frac{L_0}{m} = r^2\dot{\theta} \text{ est la constante de la loi des aires (à démontrer)} \rightarrow \text{demo 1} \star\star\star$$

$$dS = \frac{C}{2} dt. \quad \frac{dS}{dt} \text{ est appelée vitesse aréolaire} \rightarrow \text{demo 2} \star\star\star$$

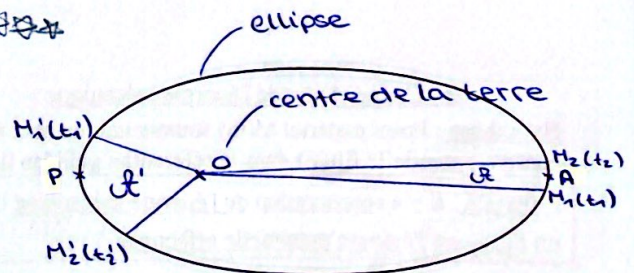
$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2 - t_1$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}'$$

$$\Rightarrow v(A) < v(P)$$

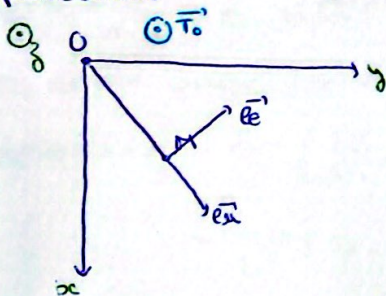
P: périhélie / périhélie

A: apogée / aphélie



demo

On se place ds le plan $\perp$ $\vec{L}_O(M)$ en coordonnées polaires.



$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

$$= r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

$$= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{L}_O(M) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \vec{C} \text{ste}}$$

$$m, \vec{e}_z \text{ cst} \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = C. \quad C \rightarrow \text{cte de la loi des aires.}$$

① Intégrale première du mouvement

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_O(M) = m C \vec{e}_z}$$

Démonstrations 2 :

Aire balayée par OM pendant dt

$$M(t) \rightarrow M'(t+dt)$$

$$M(r, \theta) \rightarrow M'(r+d\theta, \theta+d\theta)$$

$$2dS = OM \times MM'$$

$$= r \times r d\theta \rightarrow \text{on néglige le } d\theta$$

$$\Rightarrow dS = \frac{r^2 d\theta}{2} \text{ or } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$dS = \frac{r^2}{2} \dot{\theta} dt$$

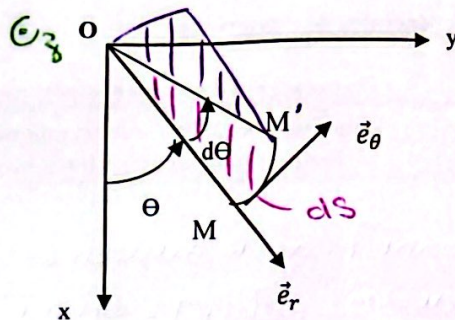
$$\Rightarrow \boxed{dS = \frac{C}{2} dt} \text{ où } C = r^2 \dot{\theta}$$

↳ surface balayée.

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$$

Rq : Si à $t=0$, $\vec{v}_0 \parallel \vec{OM}_0 \Rightarrow \vec{L}_0(M) = \vec{0} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$\Rightarrow \forall t \quad \vec{OM} \parallel \vec{v} \Rightarrow$ la trajectoire est rectiligne.

2.) Conservation de l'énergie mécanique

Hypothèse : Point matériel M(m) soumis uniquement à une force centrale conservative $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ dérivant d'une énergie potentielle $E_p(r)$ dans le référentiel galiléen lié à O.

Propriété : Il y a conservation de l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$
où E_{peff} est l'énergie potentielle effective.

$$E_{peff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + E_p(r) \text{ (à démontrer)} \rightarrow \text{tombe parfois aux concours.}$$

dém La seule force qui travaille étant conservative, $E_m = \text{cte}$.

coord polaires $\vec{OM} = r\vec{e}_r$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r)$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

$$\vec{L}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$L_0 = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{L_0}{m r^2}}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L_0}{m r^2}\right)^2 + E_p(r)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{peff}(r)$$

$$\text{où } E_{peff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E_m - E_{\text{eff}} \right] > 0$$

pour que le mouvement existe.

5

- E_m, L_0 (cotes du mut) déterminées par les CI.
- $E_p(x)$ dépend de la force étudiée.
- cf M3 puits et barrières de potentiel.

3.) Description des trajectoires pour les champs newtoniens

Hypothèse : Point matériel $M(m)$ soumis à une force centrale conservative dérivant d'une énergie potentielle $E_p = -\frac{k}{r}$ dans le référentiel galiléen lié à O.

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Planetes/Nature_FJ.php

$$E_{\text{eff}}(x) = \frac{L_0^2}{2mx^2} + E_p(x) = \frac{L_0^2}{2mx^2} - \frac{k}{x} \Rightarrow E_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{L_0^2}{2mx} - k \right)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 \Rightarrow E_{\text{eff}}(x) \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow E_{\text{eff}}(x) \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$E_{\text{eff}}(x) = \frac{L_0^2}{2m} x^{-2} - k x^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dE_{\text{eff}}(x)}{dx} &= \frac{L_0^2}{2m} (-2x^{-3}) - k(-x^{-2}) \\ &= -\frac{L_0^2}{mx^3} + \frac{k}{x^2} \end{aligned}$$

$$\frac{dE_{\text{eff}}}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(k - \frac{L_0^2}{mx} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{L_0^2}{mk} > 0 \text{ si } k > 0$$

x_0 existe uniquement si $k > 0$.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} E_{\text{eff}}(x_0) &= \frac{mk}{L_0^2} \left(\frac{L_0^2}{2m} \times \frac{mk}{L_0^2} - k \right) \\ &= \frac{mk}{L_0^2} \left(\frac{k}{2} - k \right) \\ &= \frac{mk}{L_0^2} \left(-\frac{k}{2} \right) \end{aligned}$$

$$E_{\text{eff}}(x_0) = -\frac{mk^2}{2L_0^2} < 0$$

(existe si $k > 0$)

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \text{ ou } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \text{ ou } q_1 q_2 < 0.$$

6

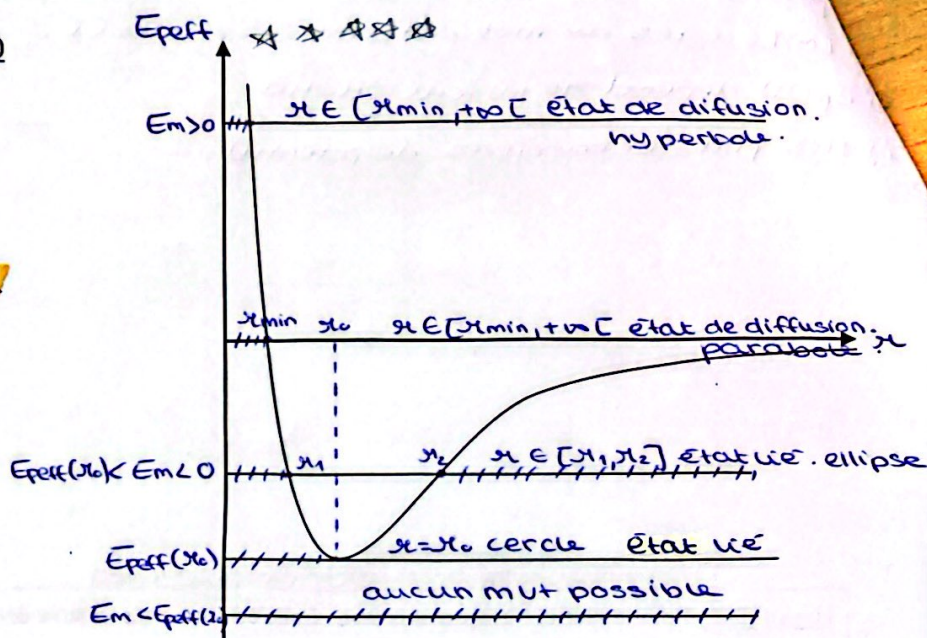
★ ★ ★ ★ ★

Premier cas : Interactions attractives : $K > 0$

r	0	r_0	$+\infty$
$\frac{dE_{\text{eff}}}{dr}$		- 0 +	
E_{eff}	$+\infty$		0

$E_{\text{eff}}(r_0) \rightarrow 0$

Pour qu'il y ait mut, $E_m > E_{\text{eff}}$.



Remarque : En utilisant la LFD en coordonnées polaires, on peut montrer que les trajectoires sont des coniques :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \text{ où } p \text{ et } e \text{ sont deux constantes. } p \text{ est le paramètre et } e \text{ l'excentricité.}$$

$e = 0$ cercle, $0 < e < 1$ ellipse, $e = 1$ parabole, $e > 1$ hyperbole.

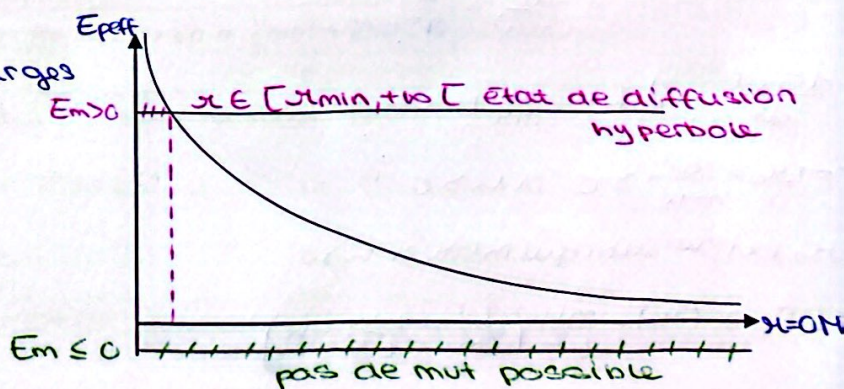
à la lém au prq.

Deuxième cas : Interactions répulsives : $K < 0$

(uniquement pour 1 interac* entre 2 charges si charges de m signal).

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 < 0 \text{ où } q_1 q_2 > 0.$$

r	0	$+\infty$
$\frac{dE_{\text{eff}}}{dr}$		-
E_{eff}	$+\infty$	0



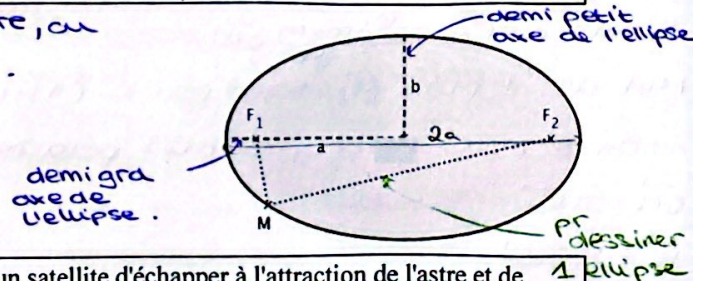
III Mouvement dans un champ gravitationnel $\vec{F} = -\gamma \frac{m_0 m}{x^2} \vec{e}_x$ $E_p = -\frac{\gamma m_0 m}{x}$ ($k = \gamma m_0 m > 0$)

1.) Les trois lois de Kepler ★★ ★

Kepler énonça trois lois expérimentales sur le mouvement des planètes (autour de 1610)

- 1) Chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le soleil est un foyer. S en F_1 ou F_2
- 2) L'aire balayée par le rayon soleil-planète est proportionnelle au temps mis pour la décrire (loi des aires).
- 3) Pour toutes les planètes gravitant autour du soleil, $\frac{T^2}{a^3} = Cste$ où T est le temps de révolution et a le demi grand-axe de l'ellipse.

Generalisation aux satellites de la Terre, ou de tout astre de centre $O = F_1$ ou F_2 .



2.) Vitesse de libération

Vitesse de libération v_l : Vitesse initiale minimale permettant à un satellite d'échapper à l'attraction de l'astre et de parvenir en un point infiniment éloigné ($r \rightarrow +\infty$).

Elle est telle que $E_m = 0$, ce qui correspond à une trajectoire parabolique. $v_l = \sqrt{\frac{2\gamma m_0}{r}}$ (à démontrer)

Système = {satellite M(m) évoluant dans le champ de gravitation de l'astre de centre O et de masse m_0 }

Référentiel galiléen lié à O, les axes pointant vers trois étoiles fixes.

Hypothèses : O supposé fixe ($m \ll m_0$). L'effet d'autres astres est négligé.

On peut assimiler le champ gravitationnel d'un astre à symétrie sphérique à celui d'une masse placée en son centre.

Rq : Si O = centre de la Terre $\Rightarrow$ ref géocentrique. juste écrire 1 cons de l'Em.

$\vec{F} = -\gamma \frac{m_0 m}{x^2} \vec{e}_x$ conservative : dérivé d'une énergie potentielle $E_p = -\gamma \frac{m_0 m}{x}$

$\Rightarrow$ conservation de l'Em. $E_m(t=0) = E_m(t) \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{m_0 m}{x_0} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m_0 m}{x}$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m_0 m}{x_0} = \frac{1}{2} m v^2 > 0$ pour que v existe.

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{m_0 m}{x_0} > 0$

$\Rightarrow v_0^2 > \sqrt{\frac{2\gamma m_0}{x_0}}$ $v_0 > v_l$ où $v_l = \sqrt{\frac{2\gamma m_0}{x_0}}$

Pour $v_0 = v_l$: $E_m = 0 \Rightarrow$ trajectoire parabolique

Pour $v_0 > v_l$: $E_m > 0 \Rightarrow$ trajectoire hyperbolique

états de diffusion.

$\hookrightarrow$ (cf graphique p6 $k > 0$)

Remarque : Effet de fronde gravitationnelle

$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m_0 m}{x} = Cste. \Rightarrow$ qd on s'approche d'un astre : $x \downarrow \Rightarrow \frac{1}{x} \uparrow \Rightarrow -\gamma \frac{m_0 m}{x} \downarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 \uparrow \Rightarrow v \uparrow$

$\Rightarrow$ utiliser ce principe pr envoyer une sonde sur Mars.

cf figure animation pour la physique : assistance gravitationnelle.

à redémontrer

3.) Etude d'un mouvement circulaire ~~Interro~~Hypothèses : Satellite en mouvement circulaire autour de O (m_0). On montre que :

Vitesse circulaire : $v_c = \sqrt{\frac{g m_0}{r}}$	Période : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g m_0}$	Energie mécanique : $E_m = -\frac{g m_0 m}{2r} = \frac{E_p}{2} = -E_c$
---	--	--

Pour une orbite elliptique, on admet la généralisation de T et E_m en remplaçant r par a.Syst d satellite M (m)Ref galiléen centré sur O (m_0) fixe.

soumis à $\vec{F} = -\frac{g m_0 m}{x^2} \vec{e}_x$

Mvt ds 1 plan passant par O (THC)

⇒ On se place en coordonnées polaires

$\vec{OM} = x \vec{e}_x \quad x = c \sin \theta$

$\vec{v} = x \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

$\vec{a} = x \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - x \dot{\theta}^2 \vec{e}_x = \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{x} \vec{e}_x$ avec $v = x \dot{\theta}$

LFD $m \vec{a} = -\frac{g m_0 m}{x^2} \vec{e}_x$

sur $\vec{e}_\theta$: $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = c \sin \theta$

sur $\vec{e}_x$: $-\frac{mv^2}{x} = -\frac{g m_0 m}{x^2} \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{g m_0}{x}}$

$T = \frac{2\pi x}{v} = \frac{2\pi x \sqrt{x}}{\sqrt{g m_0}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi x^3}{g m_0} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{x^3} = \frac{4\pi}{g m_0}}$ 3^e loi de Kepler

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{g m_0}{x}$

$E_p = -\frac{g m_0 m}{x}$

$\Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{g m_0 m}{2x} = \frac{E_p}{2} = -E_c}$

Orbite elliptique $x = a$: demi grand axe de l'ellipse.

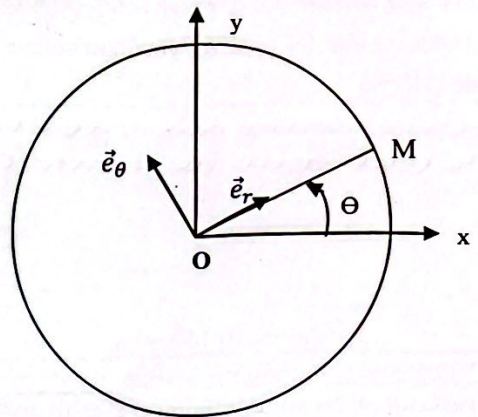
$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi}{g m_0}}$

$\boxed{E_m = -\frac{g m_0 m}{2a}}$

admise

(pas de comparaison avec v car $v \neq c$ pour 1 ellipse).

Rq : Si le satellite subit des frottements

Théorème de l'Em $\Delta E_m = W_{frot} < 0 \Rightarrow E_m \searrow$. $x \uparrow, v \uparrow$ Spirale jusqu'à écrasement sur l'astre.

4.) Satellites terrestres

a) Généralités

Système = {satellite M(m) évoluant dans le champ de gravitation de la terre de centre O et de masse m_T }

★ ★ Référentiel géocentrique supposé galiléen, lié au centre de la terre O, les axes pointant vers trois étoiles fixes.

↳ suffisamment éloignée.

$\vec{g}$ est le champ de pesanteur. $\approx$ MC2

$g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur au voisinage du sol, à une latitude $\lambda = 45^\circ$. (altitude nulle)

L'accélération de la pesanteur au niveau du sol est donnée par $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ Le rayon de la terre vaut $R_T = 6380 \text{ km}$.

Première vitesse cosmique : $v_{c1} = \sqrt{g_0 R_T}$ pour un satellite en orbite circulaire rasante.

$$v_{c1} \approx 8 \text{ km.s}^{-1}$$

Deuxième vitesse cosmique : $v_{c2} = \sqrt{2g_0 R_T}$ pour un satellite lancé du sol.

$$v_{c2} \approx 11 \text{ km.s}^{-1}$$

démo → refaire la démo et apprendre à long terme.

Syst { Satellite (m) } Ref Galiléen géocentrique.

soumis à $\vec{F}_{m_T \rightarrow m} = -\frac{G m_T m}{x^2} \vec{e}_x = m \vec{G}$ où $\vec{G}$ est le champ de gravitation créé par la terre.

$\vec{F}_{m_T \rightarrow m} = m \vec{G} \approx m \vec{g}$ où $\vec{g}$ le champ de pesanteur (qui comprend en plus des forces d'inertie, liées à la rotation de la Terre sur elle-même).

$$\Rightarrow \vec{g} \approx -\frac{G m_T}{x^2} \vec{e}_x \quad \text{où } x = R_T + z \quad (z \text{ altitude}).$$

Au niveau du sol : $z = 0$

$$\vec{g}_0 = -\frac{G m_T}{R_T^2} \vec{e}_x = -g_0 \vec{e}_x \quad \text{où } g_0 = \frac{G m_T}{R_T^2} \Rightarrow g_0 R_T^2 = G m_T \quad (1)$$

Pour un satellite de la terre:

$$\text{vitesse circulaire} \quad v_c = \sqrt{\frac{G m_T}{x}} \stackrel{(1)}{=} \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{x}}$$

Satellite en orbite rasante: $x = R_T$

$$v_c = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T}} \quad \boxed{v_{c1} = \sqrt{g_0 R_T}}$$

Première vitesse cosmique

$$v_{c1} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\boxed{v_{c1} \approx 8 \text{ km.s}^{-1}} \quad x > R_T \Rightarrow v < v_{c1}$$

Vitesse de libération

$$v_l = \sqrt{\frac{2G m_T}{x}} \stackrel{(1)}{=} \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{x}}$$

Satellite initialement sur terre $x = R_T$

$$\Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2g_0 R_T^2}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T}$$

$$v_{c2} = \sqrt{2g_0 R_T} \quad 2^{\text{e}} \text{ vitesse cosmique}$$

$$v_{c2} = 11 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\boxed{v_{c2} \approx 11 \text{ km.s}^{-1}}$$

Rq : Ariane 5 : $v = 2 \text{ km.s}^{-1}$ 2 min après le décollage.

$v \approx 8 \text{ km.s}^{-1} \approx v_{c1}$ 10 min après.

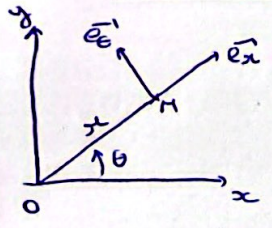
Remarques : Autres satellites terrestres

- Satellites en orbite basse, de forte inclinaison (survolant quasiment les pôles) : $300\text{km} < z < 2000\text{km}$ $T = 1$ à 2h . Station spatiale internationale, satellites de communication, observation terrestre.
- Satellites en orbite moyenne, d'orbites inclinées d'environ 50° : $z \approx 20\,000\text{ km}$ $T = 12\text{h}$. Satellites de navigation (GPS)

IV Script python : Satellite soumis à la force d'interaction gravitationnelle, tracé des trajectoires.

1.) Principe

On écrit la loi fondamentale de la dynamique appliquée au satellite dans le référentiel géocentrique galiléen



$$m\vec{a} = \vec{F} = -\frac{\gamma m_T m}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\gamma m_T}{r^2} \vec{e}_r \text{ où } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \text{ où } \|\vec{r}\| = r$$

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{\gamma m_T}{r^3} \vec{r}}$$

sur $\vec{e}_r$: $\ddot{x} = -\frac{\gamma m_T}{r^3} x$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

sur $\vec{e}_y$: $\ddot{y} = -\frac{\gamma m_T}{r^3} y$

Méthode d'Euler

$$h = t_{k+1} - t_k \Rightarrow t_{k+1} = t_k + h$$

$$\dot{x}_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{h} \Rightarrow x_{k+1} = x_k + h * \dot{x}_k$$

$$\ddot{x}_k = \frac{\dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k}{h} \Rightarrow \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + h * \ddot{x}_k$$

$$\text{où } \ddot{x}_k = -\frac{\gamma m_T}{r^3} x_k \Rightarrow \dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + h * \left(-\frac{\gamma m_T}{r^3} x_k\right) \text{ de } \ddot{m} \text{ sur } y.$$

2.) Mise en oeuvre

##Résolution d'une équation différentielle avec Euler

#on prendra $G.M=1$ et $r_0=1$ soit $x_0=1$ et $y_0=0$, $v_{x0}=0$ et $v_{y0}=v_0$

$v_0=1$ pour la trajectoire circulaire, $v_0=1,414$ pour la trajectoire parabolique

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
#  $\gamma m_T = 1$ 
def eq_euler(a,b,x0,y0,vx0,vy0,n):
```

```
    t = a
    h = (b-a)/n
    x, y, vx, vy = x0, y0, vx0, vy0
    ls_t = [t]
    ls_x = [x]
    ls_y = [y]
    ls_vx = [vx]
    ls_vy = [vy]
    for i in range(n):
        t = t+h
        x = x + h * vx
        y = y + h * vy
        r = (x**2 + y**2)**(0.5)
        vx = vx - h * x / (r**3)
        vy = vy - h * y / (r**3)
        ls_t.append(t)
        :
    return (ls_t, ls_x, ls_y, ls_vx, ls_vy)
```

#on crée une liste de n=8 valeurs pour vo, entre 0.2 à 1.6, 0 posant pb.

n=8

les_vo=np.linspace(0.2,1.6,n)

for k in range(n):

 xo,yo,vxo,vyo=1,0,0,les_vo[k]

 les_t,les_x,les_y,les_vx,les_vy=eq_euler(0,5,xo,yo,vxo,vyo,10000)

 plt.plot(les_x,les_y,label=str(round(les_vo[k],2)))

plt.legend()

plt.grid()

plt.axis("equal")

plt.title("trajectoire du mouvement d'un satellite en fonction de la vitesse initiale")

plt.show()

##Résolution d'une équation différentielle avec odeint

#définition de la liste des temps : on prendra 10 000 points entre 0 et 15s

les_t = np.linspace(0, 15,10000)

##on définit une fonction eq_mouvement d'arguments z et les_t, qui renvoie vx, vy, ax, ay où ax et ay sont données par les équations différentielles du mouvement, avec x,y,vx,vy=z

def eq_mouvement(z,les_t):

 x,y,vx,vy=z

 r=(x**2+y**2)**0.5

 ax=-x/(r**3)

 ay=-y/(r**3)

 return (vx,vy,ax,ay)

#on crée une liste de n=8 valeurs pour vo, entre 0.2 à 1.6, 0 posant pb.

n=8

les_vo=np.linspace(0.2,1.6,n)

#sol=odeint(eq_mouvement, (x0,y0,vx0,vy0), les_t) donne un tableau numpy.

#un element du tableau est formée d'une liste comprenant les positions et les vitesses

#on récupère les deux premières colonnes (via la commande sol[:, 0] pour la colonne 1)

#on trace les trajectoires correspondant aux différentes valeurs de v0.

for k in range(n):

 (x0,y0,vx0,vy0)=(1,0,0,les_vo[k])

 sol=odeint(eq_mouvement, (x0,y0,vx0,vy0), les_t)

 X=sol[:,0]#on récupère toute la première colonne

 Y=sol[:,1]#on récupère toute la deuxième colonne

 plt.plot(X,Y,label=str(round(les_vo[k],2)))

plt.legend()

plt.grid()

plt.axis("equal")

plt.title("trajectoire du mouvement d'un satelliti

plt.show()

trajectoire du mouvement d'un satellite en fonction de la vitesse initiale

