

DS 5 : Mécanique - Chimie des solutions - Interférences - Filtrage

Samedi 7 février

PTSI La Martinière Monplaisir

Durée : 4 heures

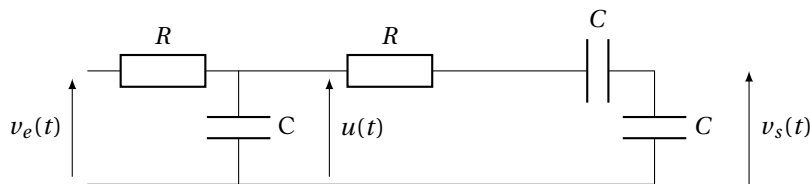
⇒ Les calculatrices sont interdites ⇐

Veiller à la clarté de la rédaction et à l'homogénéité des équations. Présenter les résultats sous forme littérale avant de faire les applications numériques. Mettre en évidence (encadrer, souligner...) les résultats. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement ajusté au moment de la correction. Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être abordées dans l'ordre de votre choix.

I Filtrage

On s'intéresse au circuit ci-dessous avec $v_e(t) = E_0 \cos(\omega t)$:

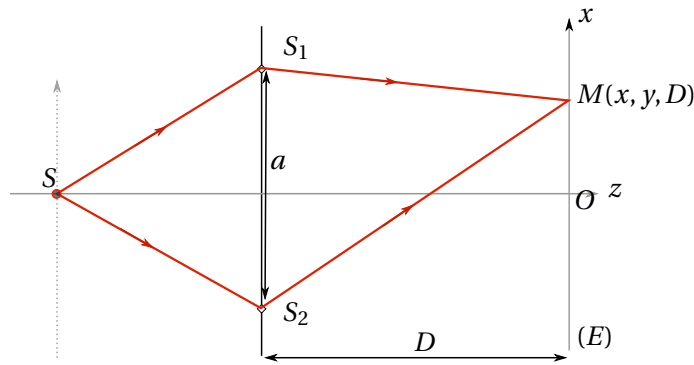


1. Comment se comporte qualitativement, en hautes et basses fréquences, le filtre ainsi constitué ? Conclure sur la nature du filtre.
2. Calculer la fonction de transfert du filtre. On commencera par calculer $\underline{v_s}$ en fonction de $\underline{u}$.
3. Déterminer les paramètres canoniques du filtre. On notera ω_0 la pulsation caractéristique, Q le facteur de qualité, et H_0 le gain en régime continu.
4. Étudier puis représenter le diagramme de Bode en gain et phase. On précisera les valeurs des pentes des éventuelles asymptotes du gain.
5. On alimente le filtre par une tension créneau de pulsation $10\omega_0$, d'amplitude E et de moyenne nulle. Quelle est l'allure du signal de sortie ? Quelle est la fonction réalisée par le filtre ?

II Interférences : Fentes d'Young éclairées par une lampe à sodium

II.1 Fentes d'Young en lumière monochromatique

On considère ici un système de fentes d'Young distantes de a , éclairées par une source monochromatique et ponctuelle, de longueur d'onde λ_1 . La situation considérée est la suivante :



L'écran est situé à une distance D du plan des fentes, chacune des fentes émet une intensité lumineuse I_0 .

1. Expliquer pourquoi les deux ondes émises par S sont en phase en S_1 et S_2 .
2. On considère un point M , repéré par sa coordonnée x sur l'écran. Retrouver l'expression de la différence de marche $\delta = (S_2M) - (S_1M)$ en fonction des paramètres du problème.
3. Donner l'expression de l'intensité lumineuse observée sur l'écran en fonction de x . On rappelle la formule de Fresnel pour l'intensité lumineuse en un point M : $I(M) = 2I_0 [1 + \cos(\Delta\phi(M))]$, avec $\Delta\phi(M)$ le déphasage au point M .
4. Représenter l'intensité en fonction de x .
5. Définir l'interfrange, et le calculer en fonction des données du problème.

Lorsque la source primaire S (cf. schéma précédent) n'est plus monochromatique mais a un spectre discret où apparaissent les longueurs d'onde λ_k , l'intensité observée sur l'écran s'écrit

$$I_{tot}(x) = \sum_k I_k(x),$$

où l'intensité $I_k(x)$ est l'intensité obtenue pour la longueur d'onde λ_k avec la formule de Fresnel.

On reprend le montage de la partie précédente, et on remplace la source monochromatique par une source à vapeur de sodium, dont la partie la plus visible est composée d'un *doublet* de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 .

6. Calculer l'intensité résultante en un point M de l'écran, repérée par sa coordonnée x . Montrer que le résultat peut se mettre sous la forme

$$I(x) = 4I_0 \left[1 + \mathcal{C}(x) \cos \left(bx \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \right].$$

On identifiera notamment le paramètre b et la fonction $\mathcal{C}(x)$.

III Mécanique : Lancer de poids

Pour éviter les confusions, nous appellerons «boulet» le projectile étudié afin de réserver le mot «poids» à la force de pesanteur.

Une athlète, de hauteur H bras levé, lance un boulet de masse m avec une vitesse initiale v_0 située dans le plan (xOy) , sous l'angle α par rapport au sol (figure ci-dessous). Le but de ce problème est d'étudier la modélisation d'un lancer puis de déterminer les conditions du « meilleur lancer ».

Pour les applications numériques on prendra :

- $m = 4,0 \text{ kg}$
- $v_0 = 10 \text{ m/s}$
- $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- $H = 2,0 \text{ m}$

Le record du monde féminin du lancer de poids est actuellement de $x_{max} = 22,63 \text{ m}$.

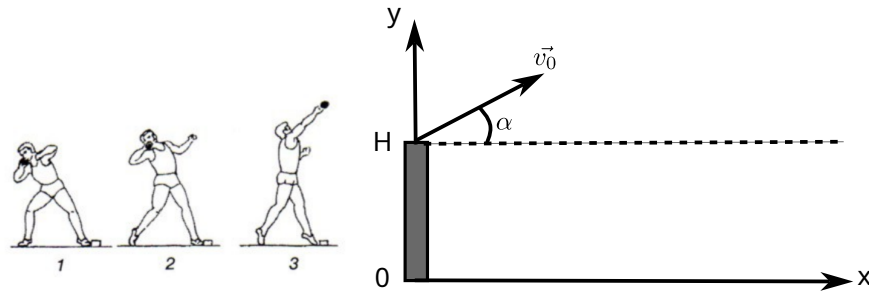


FIGURE III.1 – À gauche : Les trois phases finales du lancer du boulet. À droite : La modélisation mécanique pour l'étude du mouvement.

III.1 Étude du lancer

On suppose que le boulet n'est soumis qu'à la force de pesanteur dès qu'il a quitté la main de l'athlète. Les conditions initiales du mouvement correspondent à l'instant et au point de l'espace où le boulet est lâché.

1. Déterminer la nature du mouvement du boulet selon l'axe (Ox) .
2. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.
3. Calculer l'énergie mécanique du boulet à l'instant où il quitte la main de l'athlète. On supposera l'énergie potentielle du poids nulle au niveau du sol.
On note (x_s, y_s) les coordonnées du sommet de la trajectoire.
4. En utilisant une méthode énergétique, déterminer l'expression de la coordonnée y_s en fonction de H , v_0 , g et α .
5. Application numérique : pour le cas $\alpha = 30^\circ$, calculer la valeur numérique de y_s .

III.2 Détermination du meilleur lancer

On cherche à déterminer l'angle α_m qui est une valeur de l'angle α qui permet de réaliser le meilleur lancer pour une vitesse initiale v_0 fixée. On suppose α compris entre 0 et $\pi/2$.

6. À partir des équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$, exprimer l'équation $y(x)$ de la trajectoire du boulet.
7. Établir l'équation du second degré régissant la coordonnée x_c du point de chute du boulet sur le sol. On mettra cette équation sous la forme : $Ax_c^2 + Bx_c + D = 0$, avec $A = \frac{g}{2v_0^2}$, B et D étant des paramètres ne dépendant que de H et α .
8. Déterminer la solution de cette équation en fonction des paramètres du problème.
Une étude mathématique de cette équation permet d'exprimer la valeur maximale de x_c notée x_{cm} qui correspond au meilleur lancer. On montre que :

$$x_{cm} = \frac{2H \cos \alpha_m \sin \alpha_m}{\cos^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha_m}.$$

À partir de l'équation de la trajectoire et des conditions définissant α_m et x_{cm} on trouve

$$\tan^2 \alpha_m = \frac{1}{1 + 2gH/v_0^2}.$$

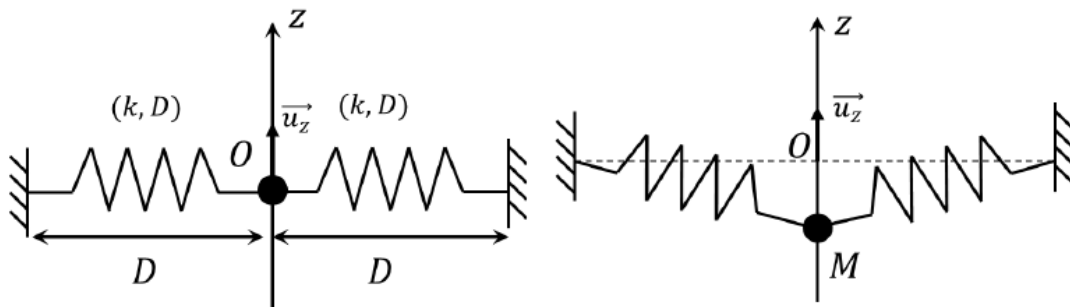
9. Commenter l'expression de $\tan \alpha_m$. En particulier, comparer avec la solution obtenue lorsque $H = 0$.
10. Établir l'expression $x_{cm} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gH}$.
11. Étudier qualitativement l'influence de la taille de l'athlète sur le meilleur lancer.

12. Application numérique : calculer x_{cm} et α_m à partir des données du problème. Comparer le résultat avec le record féminin du lancer de poids.

13. Tous les autres paramètres restant identiques, à quelle vitesse faudrait-il lancer le boulet pour atteindre le record féminin x_{max} du lancer du poids? On ne fera pas l'application numérique.

IV Mécanique : Trampoline

Dans cette partie on souhaite étudier le mouvement d'un gymnaste sur un trampoline. On rappelle qu'un trampoline est une surface élastique déformable sur laquelle le gymnaste saute, ce qui lui permet de rebondir. Dans cette partie, on assimile le gymnaste à un point matériel M de masse m. On définit un axe vertical descendant (Oz), avec O le centre du trampoline lorsque celui-ci est au repos (figure ci-dessous à gauche), et $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire associé à cet axe. On suppose que le gymnaste ne se déplace que selon la verticale, si bien que $\vec{OM} = z\vec{u}_z$.



Le trampoline agit sur le gymnaste lorsque $z < 0$ et son action est alors modélisée par deux ressorts transversaux de constantes de raideur k qui se déforment. Lorsque le gymnaste s'enfonce dans le trampoline (comme le montre la figure ci-dessous à droite). La longueur à vide de ces deux ressorts est la distance D , correspondant à la longueur des ressorts lorsque la surface est au repos. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. On néglige tous les frottements.

1. Montrer que l'expression de l'énergie potentielle élastique dont dérive la force de rappel d'un ressort de longueur ℓ , de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k s'écrit

$$E_{p1} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2.$$

2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(z)$ due aux deux ressorts en fonction de k , D et z .

3. On suppose de petites déformations de la surface du trampoline : $|z| \ll D$. Montrer que sous cette hypothèse

$$E_{pe} = \frac{kz^4}{4D^2}.$$

On précise que $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$ si $|x| \ll 1$.

4. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_{p,tot}(z)$ du gymnaste. On distinguera les cas $z > 0$ et $z < 0$. L'origine de l'énergie potentielle totale sera prise au point O.

5. En déduire l'expression de la force verticale résultante $\vec{F} = F_z\vec{u}_z$ qui s'exerce sur le gymnaste pour $z > 0$ et pour $z < 0$.

6. Établir l'équation du mouvement du gymnaste lorsque celui-ci reste en contact avec le trampoline.

7. Déterminer la solution stationnaire z_s de l'équation précédente.

8. On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme $z(t) = z_s + f(t)$, avec $|f(t)| \ll z_s$. Montrer que f vérifie, en bonne approximation, une équation d'oscillateur harmonique dont on donnera la pulsation ω_0 .

V Chimie : réactions acido basiques

V.1 Solution d'acide acétique

On s'intéresse dans un premier temps à une solution d'acide acétique CH_3COOH . On donne le pK_a du couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-$: $pK_{a1} = 4,8$.

1. Dresser le diagramme de prédominance des espèces acido-basiques en fonction du pH de la solution.

2. Calculer le taux de dissociation $\alpha = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{c_a}$ de l'acide d'une solution aqueuse d'acide acétique dont la concentration initiale est égale est $c_a = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On justifiera les approximations que l'on est amené à faire.

3. Déterminer alors la valeur de pH de la solution.

4. Quelle opération doit-on réaliser expérimentalement avant de mesurer le pH ? Décrire en quelques lignes l'opération à réaliser.

V.2 Mélange avec une base

On mélange un volume $V = 500 \text{ mL}$ de la solution précédente avec un volume $V = 500 \text{ mL}$ d'une solution d'ammoniac (appelée ammoniacale), de concentration $c_b = 0,4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Données : $10^{0,4} \simeq 2,5$ et $\log 3 \simeq 0,5$.

5. Que valent les concentrations d'acide acétique et d'ammoniacale juste après le mélange ?

On donne $pK_a(\text{NH}_4^+/\text{NH}_3) = 9,2$.

6. Que vaut la constante de la réaction entre CH_3COOH et NH_3 ? Comment qualifier cette réaction ?

7. En déduire les concentrations des espèces en présence en fin de réaction.

8. Quelle est alors la réaction prépondérante ?

9. En déduire la valeur du pH de la solution.