
PROGRAMMES 21 et 22.

PROGRAMME 21 : du 23/03 au 27/03

REPRISE DU DÉBUT DES POLYNÔMES

POLYNÔMES : FIN

Dans tout le chapitre, K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ Dérivation dans $K[X]$: Dérivée formelle d'un élément de $K[X]$. Pour $K = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivée k -ième d'un monôme. Formule de Taylor. Caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives.
- ★ Polynôme scindé sur K . Somme et produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients. Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme. Cas des polynômes du second degré. Calcul de deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
- ★ Définition de polynômes irréductibles dans $K[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss. Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Description des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- ★ Fonctions rationnelles : Définition, forme irréductible, degré d'une fonction rationnelle. Méthode pour se ramener à une fonction rationnelle de degré < 0 . Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples de degré < 0 . Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE : LE DÉBUT

K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Familles remarquables finies de vecteurs : famille génératrice, famille libre, famille liée. Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre (la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est dite de degrés échelonnés si $\deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$). Corollaire : Toute famille de polynômes non nuls, à degrés distincts 2 à 2, est libre.

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre d'un K -ev E et $v \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n, v)$ est libre.

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER.

- Résultats sur le degré (degré d'une somme, d'un produit).
- Théorème de la division euclidienne dans $K[X]$.
- Définition d'une racine d'un polynôme.
- Définition d'une racine d'ordre au moins r , d'ordre r d'un polynôme non nul.
- Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul (2 versions : avec et sans multiplicité).
- Formule de Taylor.
- Caractérisation de la multiplicité à l'aide des polynômes dérivés.
- Somme et produit des racines d'un polynôme scindé.
- Théorème de d'Alembert-Gauss.
- Définition d'un polynôme irréductible. Cas de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- Théorème de décomposition en éléments simples sur K des fonctions rationnelles à pôles simples de degré < 0 .
- Définition d'une famille génératrice, d'une famille libre dans un ev E .

UNE QUESTION DE SAVOIR-FAIRE

Une petite décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples sera demandée.

Remarque aux colleurs : Ne pas donner d'exercice trop calculatoire.

DÉMONSTRATIONS

- **Exercice fait en cours** : Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sqrt[3]{n^2 + 1}$.
- **Exercice fait en cours** : Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X + 1) = Q(X)$. Montrer que Q est constant.
- Montrer qu'une famille de polynômes non nuls, à degrés échelonnés, est libre.

[illegible]

PROGRAMME 22 : du 30/03 au 03/04

REPRISE DES POLYNÔMES

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ Familles remarquables finies de vecteurs : famille génératrice, famille libre, famille liée. Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre (la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est dite de degrés échelonnés si $\deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$). Corollaire : Toute famille de polynômes non nuls, à degrés distincts 2 à 2, est libre.
- Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre d'un K -ev E et $v \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n, v)$ est libre.

- ★ Base d'un ev. Une famille est une base d'un ev ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces K^n , $K_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.
Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E .
- ★ Applications linéaires et bases (dans le cas où l'espace de départ admet une base finie) : caractérisation de $\text{Im } f$ (engendré par l'image d'une base), de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour une application linéaire. Une application linéaire est entièrement caractérisée par la connaissance de l'image d'une base.
- ★ Un espace vectoriel de dimension finie est un espace admettant une famille génératrice finie. Existence d'une base. Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète. Toute famille libre a moins d'éléments que toute famille génératrice. Définition de la dimension d'un espace vectoriel. Dimensions de K^n , $K_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Droites et plans vectoriels. Si E est de dimension n et $\mathcal{L}$ est une famille de n vecteurs de E , alors $\mathcal{L}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{L}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{L}$ est génératrice de E .
- ★ Matrice d'une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ d'un K -ev E de dimension finie n dans une base de E . Lorsque $p = n$, la famille est une base de E ssi la matrice est inversible.
- ★ Relations entre les dimensions : Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si les deux dimensions sont égales. Existence d'un supplémentaire d'un sev d'un K -ev de dimension finie. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension. Sev supplémentaires : lien entre les dimensions, base adaptée. Dimension de la somme de deux sous-espaces (formule de Grassmann). Caractérisation des sev supplémentaires à l'aide des dimensions.
- ★ Notion de rang :
Rang d'une famille finie de vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ d'un K -espace vectoriel E de dimension quelconque. $\text{rg}(v_1, \dots, v_p) \leq p$ et $\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = p$ ssi $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.
Si E est de dimension finie, $\text{rg}(v_1, \dots, v_p) \leq \dim(E)$ et $\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim(E)$ ssi $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice de E .
Définition du rang d'une application linéaire de E dans F . Si E est de dimension finie, $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$ et $\text{rg}(f) = \dim(E)$ ssi f est injective. Si F est de dimension finie, $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$ et $\text{rg}(f) = \dim(F)$ ssi f est surjective. Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cas particulier des endomorphismes. Un endomorphisme d'un ev de dimension finie est bijectif si et seulement si il est inversible à gauche pour $\circ$, si et seulement si il est inversible à droite pour $\circ$. Théorème du rang. $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$. Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

Remarque pour les colleurs : Les matrices d'applications linéaires seront vues dans le chapitre suivant donc ne sont pas connues des étudiants pour l'instant.

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- ❑ Résultats sur le degré (degré d'une somme, d'un produit).
- ❑ Théorème de la division euclidienne dans $K[X]$.
- ❑ Définition d'une racine d'un polynôme.
- ❑ Définition d'une racine d'ordre au moins r , d'ordre r d'un polynôme non nul.
- ❑ Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul (2 versions : avec et sans multiplicité).
- ❑ Formule de Taylor.
- ❑ Caractérisation de la multiplicité à l'aide des polynômes dérivés.
- ❑ Définition d'un polynôme scindé.
- ❑ Somme et produit des racines d'un polynôme scindé.
- ❑ Théorème de d'Alembert-Gauss.
- ❑ Définition d'un polynôme irréductible. Cas de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- ❑ Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- ❑ Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.
- ❑ Définition d'une famille génératrice, d'une famille libre dans un $\text{ev } E$.
- ❑ Définition d'une base, coordonnées.
- ❑ Image d'une base par une application linéaire : résultats d'injectivité, surjectivité, bijectivité.
- ❑ Définition de la dimension. Exemples de dimensions (ev usuels).
- ❑ Caractérisation d'une base d'un $\text{ev } E$ de dimension finie n (3 énoncés équivalents : libre à n vecteurs, génératrice à n vecteurs, la matrice dans une base de E est inversible).
- ❑ Dimension d'une somme de sev.
- ❑ Caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie.
- ❑ Définition d'une matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- ❑ Définition du rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Résultats d'inégalités et d'égalités sur le rang.
- ❑ Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
- ❑ Théorème du rang.
- ❑ Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

UNE QUESTION DE SAVOIR-FAIRE

Une petite décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples sera demandée.

Remarque aux colleurs : Ne pas donner d'exercice trop calculatoire.

DÉMONSTRATIONS

- ❑ **Exercice fait en cours :** Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X + 1) = Q(X)$. Montrer que Q est constant.
- ❑ Montrer qu'une famille de polynômes non nuls, à degrés échelonnés, est libre.
- ❑ Si A est triangulaire supérieure d'ordre n , inversible alors A^{-1} est triangulaire supérieure (on utilise la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ où E est l'espace des matrices triangulaires supérieures d'ordre n).