
PROGRAMMES 23 et 24.

PROGRAMME 23 : du 20/04 au 24/04

REPRISE DES ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

MATRICES : LE TOUT DÉBUT

Dans tout le chapitre, le corps K est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} . E et F sont deux K -ev de dimension finie. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Écriture matricielle de l'égalité vectorielle $y = f(x)$. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{n,p}(K)$. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Matrice d'une d'une composée. Lien entre matrices inversibles et automorphismes.

UN RÉSULTAT À ÉNONCER

- Définition d'une famille génératrice, d'une famille libre dans un ev E .
- Définition d'une base, coordonnées.
- Image d'une base par une application linéaire : résultats d'injectivité, surjectivité, bijectivité.
- Définition de la dimension. Exemples de dimensions (ev usuels).
- Caractérisation d'une base d'un ev E de dimension finie n (3 énoncés équivalents : libre à n vecteurs, génératrice à n vecteurs, la matrice dans une base de E est inversible).
- Dimension d'une somme de sev.
- Caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie.
- Définition d'une matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Définition du rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Résultats d'inégalités et d'égalités sur le rang.
- Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
- Théorème du rang.
- Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.
- Définition d'une matrice de vecteurs, d'une application linéaire.
- Interprétation de $y = f(x)$.

DÉMONSTRATIONS

- Si A est triangulaire supérieure d'ordre n , inversible alors A^{-1} est triangulaire supérieure (on utilise la fonction $\varphi : \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ M \mapsto AM \end{array}$ où E est l'espace des matrices triangulaires supérieures d'ordre n).
- Soit E et F des K -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Ker}(f)$ admet un supplémentaire G dans E alors $g : \begin{array}{l} G \rightarrow \text{Im}(f) \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ est un isomorphisme. En déduire le théorème du rang.
- Soit E et F des K -ev de dimension finie. Soit \mathcal{B} et \mathcal{C} des bases respectives de E et F . Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \lambda \in K$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\lambda f + g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(g)$.

PROGRAMME 24 : du 27/04 au 01/05

MATRICES

E et F sont deux K -ev de dimension finie.

- ★ Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Écriture matricielle de l'égalité vectorielle $y = f(x)$. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{n,p}(K)$. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. Matrice d'une d'une composée. Lien entre matrices inversibles et automorphismes.
- ★ Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.
- ★ Noyau, image et rang d'une matrice (définis comme le noyau, l'image, le rang de l'application linéaire canoniquement associée). Les opérations sur les lignes de A conservent le noyau, les opérations sur les colonnes de A conservent l'image de A . Théorème du rang. Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang. Correspondance entre les différentes notions de rang (matrice, famille de vecteurs, application linéaire). Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible. Conservation du rang par opérations sur les lignes et/ou colonnes. Rang de la transposée. Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire homogène est égal au rang de sa matrice. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \text{Im}(A)$.

DÉTERMINANTS

- ★ Définition générale en dimension n : il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
 - f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
 - f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
 - $f(I_n) = 1$.

On notera $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$.

- ★ Propriétés du déterminant : le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ pour tout $(\lambda, A) \in K \times \mathcal{M}_n(K)$. Effet d'un échange de colonnes, d'une transvection. Déterminant de la transposée d'une matrice carrée. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes. Développement par rapport à une colonne ou une ligne. Déterminant d'un produit de matrices carrées. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Déterminant de l'inverse. Déterminant d'une matrice triangulaire.
- ★ Autres notions de déterminant : déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices.

UN ÉNONCÉ AU CHOIX À DEMANDER

- ❑ Définition d'une famille génératrice, d'une famille libre dans un ev E .
- ❑ Image d'une base par une application linéaire : résultats d'injectivité, surjectivité, bijectivité.
- ❑ Définition de la dimension. Exemples de dimensions (ev usuels).
- ❑ Caractérisation d'une base d'un ev en dimension finie.
- ❑ Dimension d'une somme de sev.
- ❑ Caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie.
- ❑ Définition du rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Résultats d'inégalités et d'égalités sur le rang.
- ❑ Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.
- ❑ Théorème du rang.
- ❑ Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.
- ❑ Définition d'une matrice de vecteurs, d'une application linéaire.
- ❑ Interprétation de $y = f(x)$.
- ❑ Définition d'une matrice de passage.
- ❑ Formules de changements de bases.
- ❑ Définition de la fonction \det (fonction n -linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variables et telle que $\det(I_n) = 1$).
- ❑ Propriétés calculatoires du \det (échange colonnes (ou lignes), invariance par transvection, $\det(\lambda A)$, \det d'un produit, \det de la transposée).
- ❑ Formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- ❑ Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
- ❑ Déterminant d'un endomorphisme. Indépendance par rapport à la base.

DÉMONSTRATIONS

- ❑ Soit E et F des K -ev de dimension finie. Soit \mathcal{B} et \mathcal{C} des bases respectives de E et F . Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, $\lambda \in K$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\lambda f + g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(g)$.
- ❑ Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est inversible ssi $\det A \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
- ❑ Calcul du déterminant de Vandermonde : $V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.