
PROGRAMMES 25 ET 26 .

PROGRAMME 25 : du 04/05 au 08/05

REPRISE DES MATRICES ET DES DÉTERMINANTS

DÉNOMBREMENT

- ★ Cardinal d'un ensemble fini. Notation $\text{card}(A)$.
- ★ Propriétés des cardinaux : cardinal d'une partie d'un ensemble fini. Union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, différence d'ensembles, complémentaire et produit cartésien. Cardinal d'une réunion d'ensembles disjoints 2 à 2. La formule du crible est hors programme.
- ★ Nombre de p -listes (p -uplets) d'éléments d'un ensemble fini de cardinal n . Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
- ★ Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n (p -arrangements). Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n . Définition d'une permutation, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n .
- ★ Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n . Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
- ★ Démonstrations combinatoires des formules du triangle de Pascal et du binôme. Calcul de $\text{card}(\mathcal{P}(E))$ où E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
- ★ Principe des tiroirs.

UN RÉSULTAT À ÉNONCER

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ❑ Définition d'une matrice de vecteurs, d'une application linéaire. ❑ Interprétation de $y = f(x)$. ❑ Définition d'une matrice de passage. ❑ Formules de changements de bases. ❑ Définition de la fonction \det (fonction n-linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable et telle que $\det(I_n) = 1$). ❑ Propriétés calculatoires du \det (échange colonnes (ou lignes), invariance par transvection, $\det(\lambda A)$, \det d'un produit, \det de la transposée). | <ul style="list-style-type: none"> ❑ Formule de développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. ❑ Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. ❑ Déterminant d'un endomorphisme. Indépendance par rapport à la base. ❑ Propriétés des cardinaux : réunion disjointe ou pas, différence d'ensembles, complémentaire, produit cartésien. ❑ Définition d'une p-liste, d'un p-arrangement, d'une permutation, d'une p-combinaison. ❑ Calcul de $\text{card}(\mathcal{P}(E))$ où E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. |
|---|---|

DÉMONSTRATIONS

□ Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est inversible ssi $\det A \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

□ Calcul du déterminant de Vandermonde : $V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

□ Démonstration combinatoire :

Soit $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n - 1$. $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ (« Formule du capitaine »)

* * * * *

PROGRAMME 26 : du 18/05 au 22/05

Il n'y a pas de colles la semaine du 11 mai.

REPRISE DU DÉNOMBREMENT

ESPACES PROBABILISÉS FINIS

- ★ Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. On se limite aux univers finis. Événement élémentaire, système complet d'événements, événements disjoints ou incompatibles, événement contraire. Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E .
- ★ Probabilité sur un univers fini. Espace probabilisé (Ω, P) . Propriétés des probabilités : réunion de deux événements, événement contraire, différence, croissance. La formule du crible est hors programme. Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leq x)$. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ (famille finie d'éléments de \mathbb{R}_+ de somme 1). Probabilité uniforme.
- ★ Définition d'une probabilité conditionnelle P_A . Une probabilité conditionnelle est une probabilité. Formule des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.
- ★ Loi P_X d'une variable aléatoire. La loi de X est déterminée par la connaissance de $X(\omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\omega)$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$. Variable aléatoire $f(X)$. Loi de $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement A .
- ★ Couple de variables aléatoires : La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y) , les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y . La loi conjointe permet d'en déduire les lois marginales. Notation $P(X = x, Y = y)$ pour désigner $P((X = x) \cap (Y = y))$. Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Remarque : La notion d'indépendance et les lois usuelles ne sont pas au programme cette semaine.

UN RÉSULTAT À ÉNONCER

- Propriétés des cardinaux (réunion disjointe ou pas, différence d'ensembles, complémentaire, produit cartésien).
- Définition d'une p -liste, d'un p -arrangement, d'une permutation, d'une p -combinaison.
- Calcul de $\text{card}(\mathcal{P}(E))$ où E est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
- Définition d'un système complet d'événements.
- Définition d'une probabilité.
- Propriétés des probabilités (événement contraire, différence d'ensembles, réunion de 2 événements, croissance).
- Définition de la probabilité uniforme.
- Définition d'une probabilité conditionnelle.
- Formule des probabilités composées.
- Formule des probabilités totales.
- Formule de Bayes.
- Loi de $f(X)$ en fonction de X .
- Définition d'une loi conjointe, des lois marginales.
- Formule donnant une loi marginale connaissant la loi conjointe.

DÉMONSTRATIONS

- Démonstration combinatoire :
Soit $n \geq 2$ et $p \leq 1 \leq n - 1$. $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ (« Formule du capitaine »)

- Formule des probabilités totales.

- *Exercice fait en cours :*

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On en tire une et on note son numéro X , on la remet ensuite dans l'urne. On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X . On tire une nouvelle boule, dont le numéro est noté Y .

Déterminer la loi de X , la loi conjointe de (X, Y) puis la loi de Y .