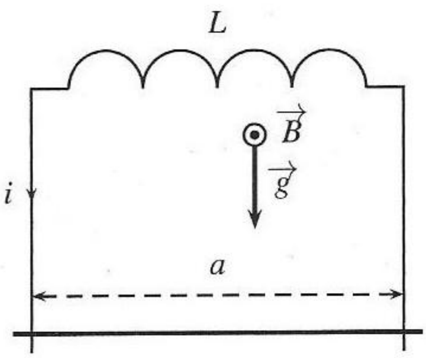
TD MA3 Circuit mobile dans un champ magnétique

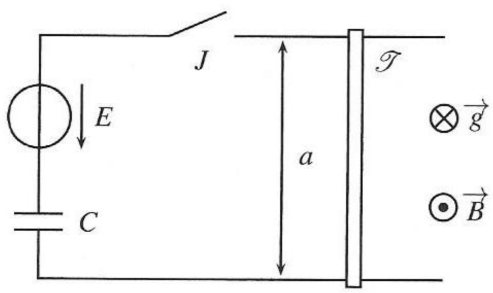
Exercice n°1. Tige qui chute



Une tige rectiligne de longueur a, de masse m et de résistance électrique R effectue un mouvement de translation verticale tout en fermant le circuit électrique qui comporte la bobine d'inductance L. On confond la résistance totale du circuit avec R et son inductance totale avec L. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et un champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{u}_y$ uniforme et stationnaire. Le mouvement de la tige est sans frottement. Elle est abandonnée à t=0 sans vitesse initiale.

1. Etablir l'équation différentielle relative uniquement à l'intensité du courant traversant la tige.
2. Dans l'hypothèse d'une résistance R nulle, calculer explicitement l'intensité du courant puis la vitesse en fonction du temps.
3. Dans le cas d'une résistance assez grande (à préciser), décrire qualitativement l'évolution du courant en traçant l'allure de l'intensité du courant i(t). Quelles sont les valeurs de i(t) et v(t) en régime permanent ?

Exercice n°2. Tige qui glisse sur un circuit capacitif



Une tige conductrice $\mathscr{T}$ glisse sur deux rails horizontaux distants de a. Elle ferme électriquement un circuit comprenant un interrupteur J, un condensateur de capacité C et un générateur de f.é.m. constante E. $\mathscr{T}$ a une résistance électrique R et une masse m. L'autoinductance du circuit sera négligée.

L'ensemble est plongé dans des champ magnétique et de pesanteur uniformes et stationnaires.

On ferme à l'instant initial l'interrupteur J alors que la tige $\mathscr{T}$ est immobile.

1. Établir une équation électrique et une équation mécanique décrivant le circuit.

2. Établir et intégrer une équation différentielle sur l'intensité du courant dans le circuit pour montrer qu'il s'écrit sous la forme :

$$i(t) = i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Identifier les valeurs de i_0 et τ.

3. En déduire que la vitesse $v(t)$ de la tige se met sous le forme :

$$v(t) = v_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

4. Calculer l'énergie $\mathscr{E}_G$ fournie par le générateur entre les instants initial $(t = 0)$ et final $(t \to \infty)$, en fonction de E, τ et R.

5. Calculer $u_C(t)$.

6. Calculer l'énergie $\mathscr{E}_C$ emmagasinée par le condensateur entre les instants initial et final.

7. Calculer l'énergie $\mathscr{E}_J$ dissipée par effet Joule entre les instants initial et final.

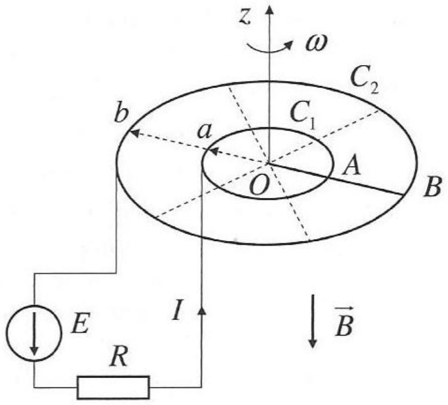
8. Calculer le travail W des forces de Laplace entre les instants initial et final.

9. Quelle relation existe-t-il entre $\mathscr{E}_G$, $\mathscr{E}_C$, $\mathscr{E}_J$ et W ? L'interpréter.

Exercice 3 : Moteur à courant continu

Le rotor d'un moteur tournant à la vitesse ω autour de l'axe fixe Oz est constitué de p tiges homogènes infiniment conductrices du type OB, toutes identiques, de masse m et de longueur l, régulièrement réparties et rigidement liées les unes aux autres pour assurer l'équilibrage du moteur et éviter les à-coups.

Elles tournent dans le plan perpendiculaire à Oz en s'appuyant sur deux rails conducteurs circulaires C_1 et C_2 d'axe Oz et de rayons respectifs a et b. Entre les rails est branché un générateur de tension constante E et la résistance du circuit est équivalente à une résistance unique R.



Le stator (non représenté sur la figure) est constitué d'un aimant permanent (dit inducteur) à entrefer plan et qui, dans l'espace où se trouve l'équipage mobile, établit un champ magnétique constant et pris uniforme $\vec{B} = -B_0\,\vec{u}_z$.

0. Préliminaires

Procéder à une analyse qualitative rapide pour montrer comment ce dispositif peut fonctionner en moteur. Avec quel autre dispositif bien connu peut-on faire l'analogie ?

1. Étude d'une tige seule

Supposons pour l'instant que le rotor soit constitué d'une seule tige OB, le courant d'intensité I parcourant la tige entre les points de contact A et B dans le sens de A vers B qui est celui de $\vec{u}_r$.

a) Calculer en fonction de B_0, a, b et I, le moment M_L^{Oz} par rapport à l'axe Oz des forces magnétiques exercées sur la tige.

b) Écrire *a priori* le bilan auxiliaire et en déduire l'expression de la force électromotrice e_{AB} (dont l'évaluation directe est plus difficile) en fonction de B_0, a, b et ω.

2. Mouvement du rotor complet

On revient au système à p tiges décrit dans l'introduction, parcouru par un courant total I.

a) Comment, d'un point de vue purement électrocinétique, sont disposés ces p conducteurs entre C_1 et C_2 ?

Que devient alors la différence de potentiel $V_A - V_B$ issue de la question **1.**a) et comment s'obtient le moment des forces sur l'ensemble du rotor en fonction du résultat de la question **1.**b) ? Montrer que les résultats sont inchangés ; quel intérêt y a-t-il alors à prendre p tiges ?

b) Écrire les équations mécanique et électrique du système donnant $I(t)$ et $\omega(t)$ sachant que :

– $J = ml^2/3$ est le moment d'inertie d'une tige par rapport à l'axe Oz ;
– on impose au moteur (c'est son rôle) de fournir sur son arbre un couple de moment égal à Γ_e constant ;
– le phénomène d'auto-induction du circuit est négligé.

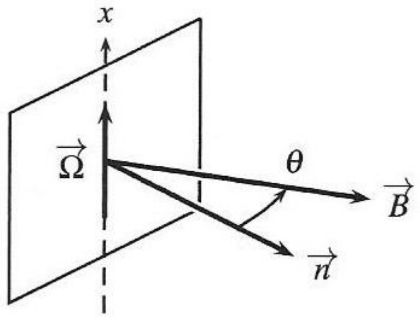
c) En déduire l'équation différentielle relative à l'évolution de la vitesse angulaire ω. Intégrer cette équation sachant qu'à l'instant initial le rotor est au repos, en introduisant un temps caractéristique τ et une valeur limite ω_l.

AN: Calculer ω_l et τ pour $E = 4$ V ; $R = 0{,}2\ \Omega$; $B_0 = 0{,}3$ T ; $a = 1$ cm ; $b = l = 5$ cm ; $m = 5$ g ; $p = 6$; $\Gamma_e = 5.10^{-3}$ m.N .

d) Montrer que le couple Γ_e fourni par le moteur à l'extérieur ne peut pas dépasser une valeur maximale Γ_{em} à déterminer.

Exercice 4 : Moteur asynchrone

Une spire plate de résistance R, d'inductance L et de surface S, tourne à vitesse angulaire constante Ω autour d'un de l'axe (Ox). La normale $\vec{n}$ à la spire est contenue dans le plan (Oyz). La spire est plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ localement uniforme, contenu dans le plan Oyz, de norme constante, tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de (Ox). Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraîne la bobine.



1. Comment réaliser un champ magnétique tournant ?

2. Expliquer sans équation pourquoi la spire tourne. Les deux vitesses ω et Ω peuvent-elles être identiques ?

3. Calculer l'équation différentielle régissant l'évolution du courant dans la bobine en fonction de l'angle instantané θ entre le champ magnétique $\vec{B}$ et la normale $\vec{n}$ à la spire. L'intégrer en régime harmonique permanent grâce au passage aux complexes (on justifiera avec soin la pulsation du courant et on n'oubliera pas de prendre la notation complexe pour les deux membres de l'équation).

4. En considérant le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de la spire, calculer le couple auquel elle est soumise. En déduire le couple moyen au cours du temps C s'exerçant sur la bobine.

5. L'allure de la courbe $C(\Omega)$ est donnée sur la figure. Le moteur peut-il démarrer seul ? A quoi correspondent les domaines pour lesquels $C > 0$ et $C < 0$?