puissance mécanique $\underset{\text{récepteur (= moteur)}}{\overset{\text{générateur}}{\rightleftarrows}}$ puissance électrique

MA3 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (extérieur)

I Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

1.) Rails de Laplace générateurs : (de courant)

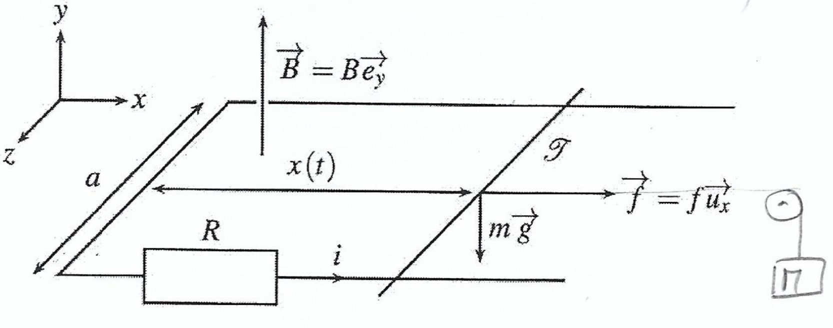


Figure 30.1 – Rails de Laplace générateurs.

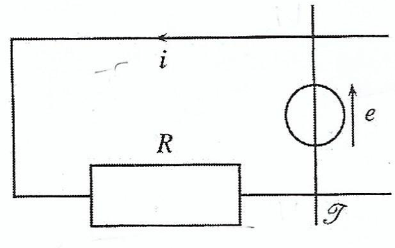
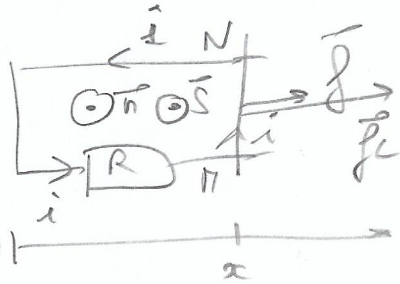


Figure 30.3 – Schéma électrique équivalent.



a) Mise en équation   cf TP induction pour l'exp.

⚠ Circuit sans générateur électrique = non alimenté

- $\vec B$ extérieur, uniforme et stationnaire
- Tige tirée par une force $\vec f$ cte (masse avec poulie)

$\Phi = \iint \vec B \cdot \vec{dS} = \vec B \cdot \vec S$ où $\vec S = S\vec n$ ($\vec n$ ds le sens de $\vec B$)

S varie donc Φ aussi ⇒ fem induite dans courant induit (ds le sens du tire bouchon) ⇒ apparition d'une force de Laplace qui s'oppose au déplacement (Loi de Lenz)

$\Phi = SB$ où $S = ax$ $\Phi = Bax$.

Loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} = -Bav$

car le circuit coupe les lignes de $\vec B$ dans son déplacement

Rq : On néglige $\frac{d\Phi_p}{dt}$ devant $\frac{d\Phi}{dt}$ (i crée $\vec B$ ⇒ Φ_p)
⇔ on néglige l'inductance propre du circuit

Équation électrique (EE) $\boxed{e - Ri = 0}$ $-Bav - Ri = 0$

⇒ $\boxed{i = -\frac{Bav}{R}}$ (1)

Système [tige] soumise à $\vec P, \vec{R_N}, \vec f, \vec{f_L}$ ds R galiléen

$\vec f = f\vec{u_x}$ $\boxed{\vec{f_L} = i\vec{MN} \wedge \vec B = iaB\vec{u_x}}$

$\vec P = -mg\vec{u_y}$ $\vec R = R\vec{u_y}$ en l'absence de frottements

LFD appliqué à la tige

$$m\vec{a} = \vec{f_L} + \vec{f} + \vec{R_N} + \vec{P}$$

sur $\vec{u_x}$: $\boxed{m\frac{dv}{dt} = f_L + f}$ (E1)

① $i = -\frac{Bav}{R} \Rightarrow \boxed{f_L = iaB = -\frac{B^2a^2v}{R}}$

$\vec{f_L}$ suivant $(-\vec{u_x})$, s'oppose au déplacement équivalente à une force de frottement fluide

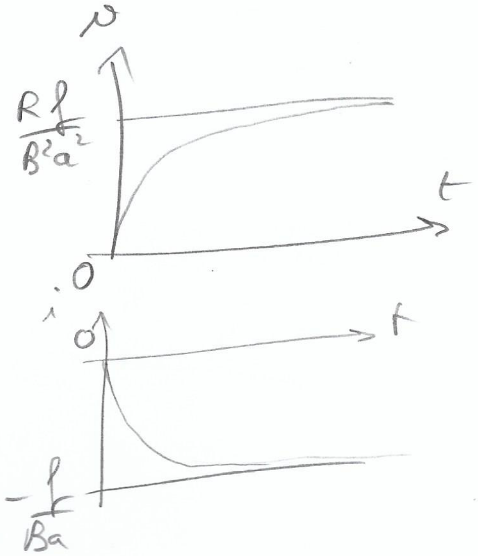
LFD $m\frac{dv}{dt} = f - \frac{B^2a^2v}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{B^2a^2}{mR}v = \frac{f}{m}}$ (E1)

$$\begin{cases} v_e = A\exp\left(-\frac{B^2a^2}{mR}t\right) \\ v_f = \frac{Rf}{B^2a^2} \end{cases} \qquad \tau = \frac{mR}{B^2a^2}$$

$$v = v_e + v_f = A\exp\left(-\frac{B^2a^2}{mR}t\right) + \frac{Rf}{B^2a^2}$$

$v(0) = 0$ $\boxed{v(t) = \frac{Rf}{B^2a^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$

$i = -\frac{Bav}{R}$ $\boxed{i(t) = -\frac{f}{Ba}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$



$i<0$ le courant circule donc en sens inverse du schéma.

$\vec{f_L} = f_L\vec{u_x}$ où $f_L < 0$

Loi de Lenz Les effets de l'induction créent un courant qui s'oppose à la cause qui lui donne naissance.

b) Bilan de puissance

(EE) $e = Ri$ où $e = -Bav$ ①

(EM) $m\dfrac{dv}{dt} = f_L + f$ où $f_L = iBa$ ②

(EE) $\times i$ $\quad ei = Ri^2 \quad \mathcal{P}_{fem} = \mathcal{P}_J$

(EM) $\times v$ $\quad m\dfrac{dv}{dt}v = f_L v + f v \quad \dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{f_L} + \mathcal{P}_{f\,motrice}$

① $e = -Bav \quad ei = -Bavi \overset{②}{\Rightarrow} ei = -f_L v \Rightarrow \mathcal{P}_{fem} = -\mathcal{P}_{f_L}$

$\boxed{\mathcal{P}_{fem} + \mathcal{P}_{f_L} = 0}$ ★ Résultat général

fem induite — force de Laplace $\quad \Rightarrow \mathcal{P}_{f_L} = -\mathcal{P}_{fem} = -\mathcal{P}_J$

$\dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{f_L} + \mathcal{P}_{f\,motrice} = -\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{f\,motrice}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{f\,motrice} = \dfrac{dE_c}{dt} + \mathcal{P}_J} \qquad f v = \dfrac{dE_c}{dt} + Ri^2$

force motrice

puissance cinétique correspond à la mise en mouvement de la tige

puissance dissipée par effet Joule (du courant créé)

En régime permanent, $\boxed{\mathcal{P}_{f\,motrice} = \mathcal{P}_J}$

Rq: Freinage par courant de Foucault (= par induction)

- freinage d'un disque en rotation
- chute d'un aimant dans un tube métallique

utilisé sur les TGV ou les camions

Récupération d'énergie (sur métro) pour convertir l'énergie cinétique en énergie électrique.

cf TP oscillateur mécanique et pendule pesant.

Aimant en mvt près d'une plaque métallique

$\Rightarrow f_L \propto v$ donc force de frottement fluide

2.) Alternateur :

$\vec{\omega} = \omega \vec{e_y}$ vecteur rotation

$\vec{B}$ champ extérieur

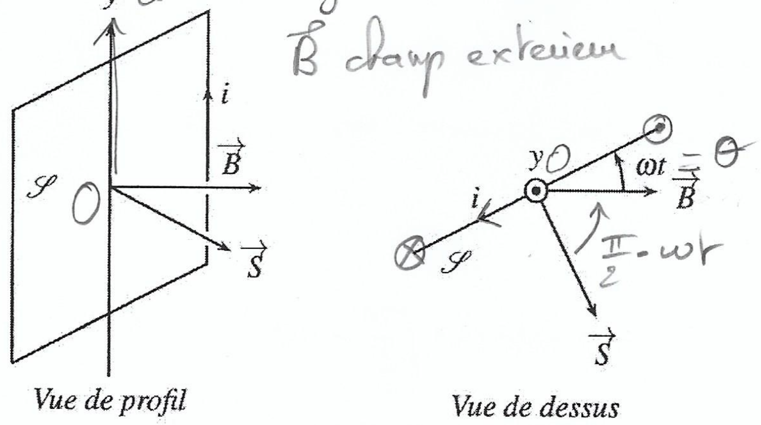


Figure 30.5 – Schéma de principe d'un alternateur.

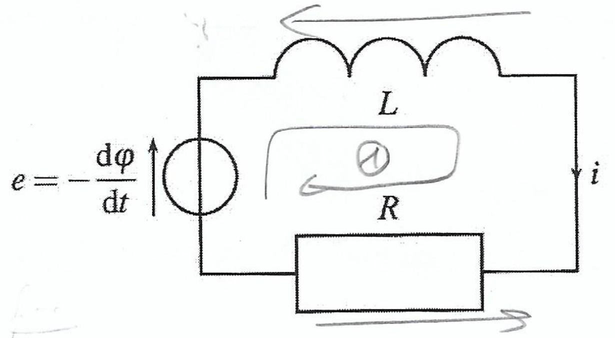


Figure 30.6 – Schéma électrique équivalent de l'alternateur.

a) Mise en équation

⚠ Spire non alimentée, $\vec{B}$ imposé de l'extérieur

Alternateur := générateur de courant électrique (dynamo de vélo, alternateur de centrale électrique)

⇒ Modélisation par 1 spire rectangulaire $(\mathscr{S})$ de surface $S = ab$ dans entrefer est fixe = Rotor en rotation / Stator fixe

Spire mobile ds $\vec{B}$ stationnaire ⇒ fem induite e ⇒ courant induit i

⇒ $\vec{\Gamma}_L$ qui s'oppose au mvt de rotation d'après la loi de Lenz

Hypothèse pour appliquer Faraday : la spire coupe les lignes de champ de $\vec{B}$ pendant sa rotation

$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ si $\vec{B}$ est uniforme et S plane $\quad \varphi = B S \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)$

$\boxed{\varphi = B S \sin(\omega t)}$ $\qquad \dfrac{d\varphi}{dt} = B S \omega \cos(\omega t)$

Loi de Faraday $e = -\dfrac{d\varphi}{dt} = -B S \omega \cos(\omega t)$ cf 30.6

d'où le schéma électrique équivalent.

équation de maille (1) $e - L\dfrac{di}{dt} - Ri = 0 \Rightarrow e = L\dfrac{di}{dt} + Ri$

$\dfrac{d\phi_p}{dt}$ n'est pas négligeable devant $\dfrac{d\phi}{dt}$ lié au champ ext.

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri = -B S \omega \cos(\omega t)}$$ Équation électrique (EE)

Spire étudiée dans le référentiel terrestre galiléen soumis à

• $\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ où $\vec{\mathcal{M}} = i \vec{S}$ $\qquad \vec{\Gamma}_L = i \vec{S} \wedge \vec{B}$

Moment résultant des actions de Laplace, $\vec{\mathcal{M}}$ moment magnétique de la spire

$\cdot \ \overrightarrow{\Gamma_{ext}} = \Gamma_{ext} \overrightarrow{e_y}$ qui permet la mise en rotation du cadre à la vitesse angulaire ω autour de $\overrightarrow{e_y}$

Rq $\left[\begin{array}{l} \cdot \ \Gamma_\Delta(\vec{P}) = \vec{0} \text{ car } G \text{ est sur l'axe de rotation} \\ \cdot \ \Gamma_\Delta(\text{action de liaison}) = 0 \text{ car la liaison est parfaite} \end{array} \right.$

<u>Théorème du moment cinétique</u> $/\Delta = (Oy)$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_L + \Gamma_{ext} \quad \text{où } \Gamma_L = iSB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = iSB\cos(\omega t)$$

$$\omega = \text{cte} \Rightarrow \Gamma_L + \Gamma_{ext} = 0 \quad \boxed{iSB\cos(\omega t) + \Gamma_{ext} = 0} \ (EM)$$

en régime permanent

<u>Rq:</u> La fem fait circuler un courant induit qui crée son propre champ magnétique ϕ_p, dont la variation n'est pas négligeable devant ϕ lié au champ ext. C'est toujours le cas pour les spires en rotation (contrairement aux rails de Laplace)

b) Résolution

$$(EE) \quad L\frac{di}{dt} + Ri = -BS\omega\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{-BS\omega\cos(\omega t)}{L}$$

$i_e = A \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$ s'amortit au bout de $5\tau = \frac{5L}{R}$

i_f est du même type que le second membre: $i_f = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

<u>Solution complexe</u> $\underline{i} = \underline{I_m} e^{j\omega t}$ où $\underline{I_m} = I_m e^{j\varphi}$

$$(jL\omega)\underline{i} + R\underline{i} = -BS\omega e^{j\omega t}$$

$$\underline{i} = -\frac{BS\omega e^{j\omega t}}{R + jL\omega}$$

$$\underline{i} = -\frac{BS\omega}{R^2 + L^2\omega^2}(R - jL\omega)(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))$$

$$\boxed{i = \mathrm{Re}(\underline{i}) = -\frac{BS\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\left[R\cos(\omega t) + L\omega\sin(\omega t)\right]}$$

c) Bilan de puissance

(EM) $\Gamma_{ext} = - iSB\cos(\omega t)$

$$\Gamma_{ext} = \frac{B^2S^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}\left[R\cos^2(\omega t) + L\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]$$

$$\langle \Gamma_{ext}\rangle_T = \frac{B^2S^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}\left[R\times\frac{1}{2}\right] = \frac{RB^2S^2\omega}{2(R^2+L^2\omega^2)}$$

Rq: $\langle f\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\cos(2\omega t) = 2\cos^2(\omega t) - 1 \Rightarrow \cos^2(\omega t) = \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}$

$$\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\omega t)}{2}\right)dt$$

$$\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right]_0^T = \frac{1}{2}$$

$$\langle\sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T\sin(\omega t)\cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{\sin(2\omega t)}{2}\,dt$$

$$\langle\sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle = \frac{1}{2T}\left[-\frac{\cos(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T = 0$$

L'alternateur délivre une puissance moyenne $\langle Ri^2\rangle = R\langle i^2\rangle$

$$i^2 = \left(\frac{BS\omega}{R^2+L^2\omega^2}\right)^2\left[R^2\cos^2(\omega t) + L^2\omega^2\sin^2(\omega t) + 2L\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]$$

$$\langle Ri^2\rangle_T = R\left(\frac{BS\omega}{R^2+L^2\omega^2}\right)^2\left[R^2\times\frac{1}{2} + L^2\omega^2\times\frac{1}{2}\right]$$

$$\langle Ri^2\rangle_T = \frac{R}{2}\,\frac{B^2S^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2}$$

$\Rightarrow \langle Ri^2\rangle = \langle\Gamma_{ext}\omega\rangle \qquad \boxed{P_J = P_{méca}}$ en régime permanent

Tte la puissance fournie par Γ_{ext} est dissipée par effet Joule.