

# DS 6 : Mécanique - Chimie des solutions

## Samedi 14 mars

PTSI La Martinière Monplaisir

**Durée : 4 heures**

**⇒ Les calculatrices sont interdites ⇐**

*Veiller à la clarté de la rédaction et à l'homogénéité des équations. Présenter les résultats sous forme littérale avant de faire les applications numériques. Mettre en évidence (encadrer, souligner...) les résultats. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.*

*Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement ajusté au moment de la correction. Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être abordées dans l'ordre de votre choix.*

## I Mouvements de rotation et à force centrale (environ 39% des points)

### I.1 Ébauche de calendrier lunaire

Dans cette partie on envisage ce que serait un calendrier lunaire. On donne la masse de la lune  $m_L = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$  et celle de la Terre  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ; la constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

On se place dans le modèle où le centre  $C_L$  de la Lune décrit autour de la Terre une trajectoire circulaire, la distance terre-lune valant à peu près, de centre à centre :  $D_{TL} = 384400 \text{ km}$ .

1. Rappeler la forme du champ de gravitation à l'extérieur de la Terre. On se place dans un système de coordonnées sphériques de centre O, au centre de la Terre.

2. Donner l'expression de la force que la Terre exerce sur la Lune.

3. Montrer que le mouvement du centre  $C_L$  de la Lune est uniforme et déterminer sa période de révolution  $T_L$ . On précisera bien le référentiel considéré.

4. Établir dans ce cas la troisième loi de Kepler. Déterminer un ordre de grandeur de  $T_L$ .

La période de révolution de la Lune autour de la Terre est de 27,32 j. On définit le mois lunaire comme la durée entre deux nouvelles lunes (lune invisible), durée appelée aussi lunaison. Cette durée est de 29,53 j.

5. Quelles sont à chaque nouvelle lune les positions respectives du soleil, de la Terre et de la Lune ?

6. Considérons le cas d'un calendrier "lunaire" de 12 mois, pour lequel le début du mois est fixé par une nouvelle lune. Pourquoi le nouvel an ne tombe-t-il pas chaque année sur le même jour du calendrier grégorien (calendrier usuel) ?

### I.2 Les horloges

#### I.2.1 Le pendule simple

On suppose ici que le système étudié est placé dans un référentiel galiléen. On considère une masse  $m_p$  accrochée à une tige de longueur  $\ell$ , de masse négligeable et pouvant tourner autour du point O (voir Fig. 1.1) avec une liaison sans frottement.

L'intensité du champ de pesanteur terrestre est  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . À l'instant  $t = 0$  le pendule, qui était écarté d'un angle  $\theta_0$ , est lâché sans vitesse initiale.

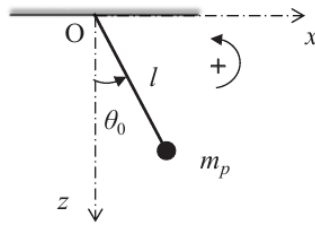


FIGURE I.1 – Pendule simple.

7. Déterminer l'équation différentielle régissant l'écartement angulaire  $\theta$  du pendule pesant par rapport à sa position au repos.
8. Linéariser l'équation précédente en considérant  $\theta$  « petit » ; en déduire l'équation horaire  $\theta(t)$ .
9. Déterminer la longueur du pendule permettant d'obtenir une période des oscillations égale à 2 s. Pourquoi dit-on dans ce cas que le pendule bat la seconde ?
10. Quel pendule pesant assez célèbre permet de faire des observations fines du comportement du globe terrestre ?
11. À quel objet familier dans les habitations d'il y a quelques vingtaines d'années, correspond à ce type d'oscillateur ? Quel est a priori l'inconvénient d'un tel système pour pouvoir garder avec soi une référence de temps ?

### I.2.2 Pendule en rotation

Un autre type d'oscillateur mécanique peut être obtenu en utilisant un balancier couplé à un ressort spiral. On s'intéresse ici à la variation de la position angulaire, notée  $\theta$ , du balancier, fixé à une extrémité du ressort. Ce balancier est mobile autour d'un axe ( $Oz$ ) (voir Fig. I.2). Le référentiel est supposé galiléen.

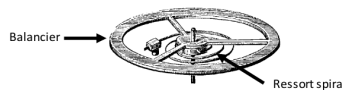


FIGURE I.2 – Balancier couplé à un ressort spiral.

Le couple de rappel de ce ressort est considéré comme proportionnel à l'élongation angulaire :  $M_r = -C\theta$ , où  $C$  est la constante de rappel du ressort spiral.

On tourne le balancier d'un angle initial  $\theta_0$ , et on le lâche sans vitesse initiale. Le mouvement est supposé avoir lieu sans frottement.

12. Déterminer l'équation différentielle qui régit le mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique (on introduira ici les grandeurs nécessaires à la mise en équation).
13. En déduire l'expression de la position angulaire en fonction du temps et l'expression de la période du mouvement.
14. La figure I.3 montre un mécanisme d'horlogerie avec le ressort spiral et le balancier mais aussi un système dit d'échappement avec une "ancrer". À quoi peut servir ce système ?

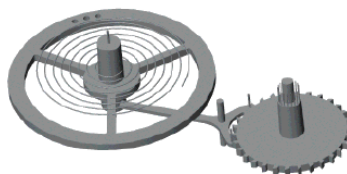


FIGURE I.3 – Mécanisme d'horlogerie avec ressort spiral et échappement.

## II Particules chargées : Étude d'un synchrotron (environ 26% des points)

Ce problème a pour but d'étudier le rayonnement émis par des particules élémentaires chargées dans un accélérateur synchrotron.

Bien qu'il soit question dans ce problème de particules allant à des vitesses proches de la vitesse de la lumière (particules relativistes voire ultra-relativistes), il est demandé d'utiliser les lois de la mécanique classique (non relativiste).

*De plus, on négligera systématiquement le poids des particules devant les autres forces.*

### II.1 Injecteur

Pour faire circuler des électrons dans l'anneau de stockage d'un synchrotron, où ils seront guidés le long d'orbites circulaires grâce à un champ magnétique, il faut préalablement les accélérer.

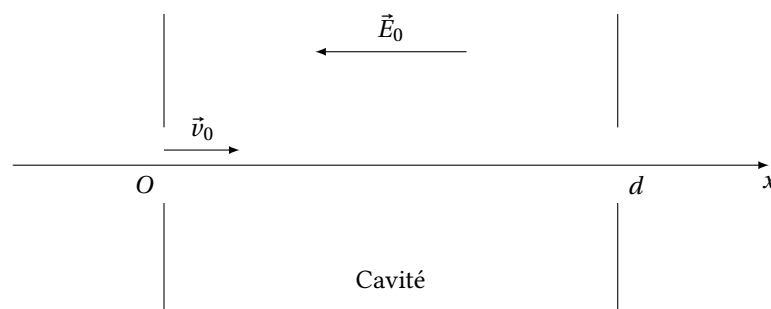
On considère une cavité accélératrice linéaire formée de deux plaques fines et conductrices de grandes dimensions transversales en  $x = 0$  et en  $x = d$ , auxquelles on applique une différence de potentiel constante  $U = V(d) - V(0) > 0$  de telle sorte que règne dans l'espace entre les plaques un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}_0$ .

1. Donner sans démonstration l'expression de  $\vec{E}_0$  en fonction de  $U$ ,  $d$  et d'un vecteur unitaire.

Dans la suite on notera  $\alpha = \frac{Ue}{md}$  une constante caractérisant l'intensité du champ électrique appliqué, où  $m$  est la masse de l'électron,  $e$  la charge élémentaire ( $q_{\text{électron}} = -e$ ).

2. Exprimer  $\vec{E}_0$  en fonction de  $m, e$  et  $\alpha$ .

3. Les plaques sont percées le long de l'axe ( $Ox$ ) afin de permettre aux électrons d'entrer (en  $x = 0$ ) et de sortir (en  $x = d$ ) de la cavité accélératrice.



Soit  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  la vitesse initiale de l'électron à l'entrée de la cavité, à  $t = 0$ . Déterminer le temps  $T$  que met l'électron à traverser la cavité ainsi que sa vitesse de sortie  $\vec{v}_1$ . On donnera les résultats en fonction de  $v_0$ ,  $\alpha$  et  $d$ .

4. On peut montrer qu'une particule chargée soumise à une accélération émet du rayonnement électromagnétique, ce rayonnement émis par l'électron lui fait perdre de l'énergie et modifie donc son mouvement dans la cavité : il met un temps  $T'$  pour franchir la cavité et ressort avec une vitesse  $\vec{v}'_1$ .

On voudrait déterminer  $\vec{v}'_1$ . Pour cela, compte tenu du faible effet lié au rayonnement, on fait les hypothèses suivantes.

— On utilise la formule de Larmor pour évaluer la puissance rayonnée par l'électron :

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 = m \tau a^2 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{e^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3}$$

en prenant pour l'accélération  $a$  celle obtenue en négligeant l'effet dû au rayonnement (c'est-à-dire celle correspondant à la situation de la question précédente).

— On considère qu'au premier ordre dans l'évaluation de  $\vec{v}'_1$  on peut assimiler le temps que met l'électron à traverser la cavité à  $T$ ; on posera donc  $T' \simeq T$ .

Effectuer un bilan énergétique entre l'entrée et la sortie de l'électron, afin de déterminer  $\vec{v}'_1$ . On écrira le résultat sous la forme, en utilisant un développement limité à l'ordre 1 de  $(1+x)^\beta$  :

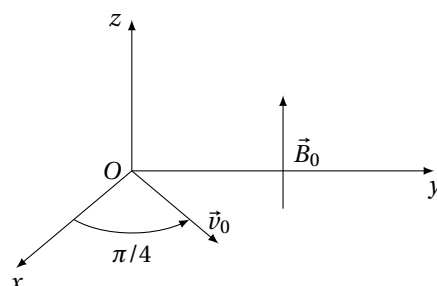
$$v'_1 \simeq v_1 - \eta \frac{T}{v_1}$$

Exprimer la constante  $\eta$  en fonction de  $\alpha$  et  $\tau$  et donner la dimension de  $\tau$ .

## II.2 Anneau de stockage

L'électron est ensuite injecté (au point  $O$ ) dans une région où seul règne un champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ .

À  $t = 0$  (nouvelle origine des temps) sa vitesse  $\vec{v}'_1$ , notée ici  $\vec{v}_0$ , est perpendiculaire au champ magnétique, donc dans le plan  $(xOy)$ , et fait un angle de  $\pi/4$  avec l'axe  $(Ox)$  conformément à la figure ci-dessous :



5. Montrer, en utilisant le théorème de l'énergie cinétique, que si l'on néglige le rayonnement de l'électron, son énergie cinétique  $\mathcal{E}_C$  est constante.

6. En utilisant le repère de Frenet que l'on représentera sur une figure, démontrer que la trajectoire de l'électron est circulaire, contenue dans le plan  $(xOy)$ , déterminer son rayon  $R_0$ .

Du fait du rayonnement émis par l'électron accéléré par le champ magnétique  $\vec{B}_0$  son énergie cinétique décroît au cours du temps. Cet effet étant faible, on peut dans la formule de Larmor pour la puissance rayonnée  $\mathcal{P}$  donnée à la question II.1 remplacer l'accélération  $a$  de l'électron par celle obtenue en ne tenant compte que de l'action du champ magnétique, exprimée en fonction de  $v$  et  $R_0$ .

7. Déterminer, en fonction de  $e$ ,  $B_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $c$ ,  $m$  et  $\mathcal{E}_C$ , la puissance  $\mathcal{P}$  rayonnée par l'électron. En déduire une équation différentielle sur  $\mathcal{E}_C$ , puis l'expression de l'énergie cinétique de l'électron au cours du temps et déterminer l'expression du temps caractéristique  $\tau'$  de décroissance de cette énergie.

8. On considère un électron d'un faisceau synchrotron magnétiquement guidé le long d'une trajectoire circulaire de rayon  $R_0$  (il ne passe plus dans une cavité accélératrice). Sur un tour, l'énergie  $\delta\mathcal{E}$  perdue par cet électron est faible et la norme  $v$  de sa vitesse quasi-constante.

Exprimer, en fonction de  $v$  et  $R_0$ , la norme  $a$  de l'accélération de l'électron puis déterminer l'énergie  $\delta\mathcal{E}$  rayonnée par l'électron sur un tour. On utilisera un développement limité de  $e^x - 1$  lorsque  $x$  est faible.

### Valeurs numériques

|                                    |                                                                    |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$                  |
| Perméabilité magnétique du vide    | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$        |
| Perméabilité diélectrique du vide  | $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Constante de Planck                | $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$               |
| Charge élémentaire                 | $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$                              |
| Masse de l'électron                | $m = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$                             |

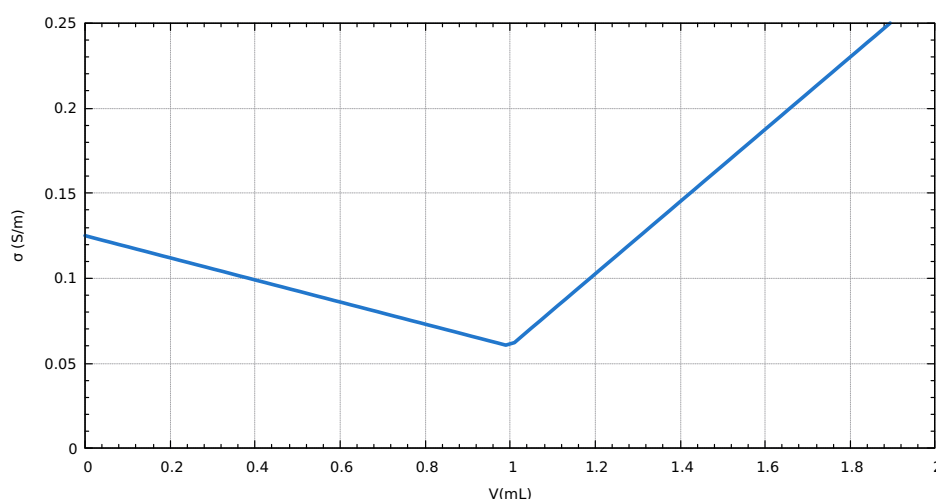
### III Le béton et le ciment face à l'eau (environ 35% des points)

On s'intéresse ici à l'étude de quelques propriétés physico-chimiques du ciment et des bétons armés. Le clinker est le principal constituant d'un ciment, il est obtenu à partir d'un mélange de 80 % de calcaire ( $\text{CaCO}_3(s)$ ) et de 20% d'argile (silicoaluminates). Le ciment est principalement utilisé pour fabriquer le béton qui est un mélange de ciment, sable, granulats et eau. Le béton forme après la prise une véritable roche artificielle. La « prise » est le phénomène de durcissement en présence d'eau.

#### III.1 Basicité d'un béton

L'hydroxyde de calcium  $\text{Ca(OH)}_2(s)$  confère à l'eau qui se trouve dans les pores du béton (solution interstitielle) un caractère fortement basique. On étudie une solution aqueuse recueillie à la surface du béton après la prise, modélisée par une solution contenant des ions  $\text{Ca}^{2+}$  et  $\text{HO}^-$  (compte tenu de la dissolution d'hydroxyde de calcium).

Le volume prélevé est égal à  $V_0 = 100.0 \text{ mL}$ ; il est titré par une solution d'acide chlorhydrique concentré ( $\text{H}_3\text{O}^+, \text{Cl}^-$ ) de concentration  $c = 0.50 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Le titrage est suivi par conductimétrie (mesure de la conductivité  $\sigma$ ) de la solution titrée en fonction du volume  $v$  de titrant ajouté. Le résultat expérimental est présenté ci-après.



1. Écrire la réaction support du titrage et indiquer la valeur de sa constante d'équilibre à  $25^\circ\text{C}$ . Préciser les propriétés essentielles d'une réaction de dosage.
2. Déterminer  $c_0$  la concentration initiale en ion hydroxyde de la solution prélevée en surface puis déterminer le pH de cette solution.
3. Justifier qualitativement (sans calcul) mais de façon détaillée l'allure de la courbe conductimétrique  $\sigma = f(v)$  obtenue.
4. Ce titrage aurait pu être suivi par pH-métrie. Dessiner l'allure de la courbe qui aurait été obtenue à l'occasion d'un suivi pH-métrique.
5. Réalisé avec une burette usuelle du laboratoire, ce titrage serait-il de précision satisfaisante ?

#### III.2 Carbonatation d'un béton

Le dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère peut se dissoudre en solution aqueuse. Dans le cas des solutions basiques il se dissout sous forme d'ions carbonate  $\text{CO}_3^{2-}$ . Lorsque le phénomène se produit sur un béton, les ions carbonate issus du dioxyde de carbone peuvent remplacer les ions  $\text{HO}^-$  de l'hydroxyde de calcium (formation de  $\text{Ca}(\text{CO}_3)(s)$ ). On parle alors de carbonatation d'un béton, conduisant à une fragilisation de sa structure. On étudie dans cette partie le carbonate de calcium (de type calcite).

6. Donner, en justifiant, un schéma de Lewis de l'ion carbonate.

7. Tracer le diagramme de prédominance des espèces en solution du carbone :  $H_2CO_3(aq)$ ,  $HCO_3^-(aq)$ , et  $CO_3^{2-}(aq)$ . Justifier que, dans le cas du béton, le dioxyde du carbone dissous en surface se trouve bien sous la forme de carbonate.

8. À l'aide des données, montrer alors que la carbonatation du béton est thermodynamiquement favorisée.

### III.3 Solubilité du carbonate de calcium suivant le pH

9. Écrire l'équation de mise en solution du carbonate de calcium solide  $CaCO_3$ .

10. À partir du diagramme de prédominance établi précédemment, déterminer le domaine de pH dans lequel les ions  $CO_3^{2-}$  prédominent.

11. Dans ce domaine de pH, calculer la solubilité de  $CaCO_3$ . Faire l'application numérique.

12. Dans le domaine où l'espèce  $H_2CO_3$  domine, déterminer l'expression de  $\log(s)$  en fonction du pH sous la forme  $\log(s) = A_1 + B_1 pH$ . On déterminera numériquement les constantes  $A_1$  et  $B_1$ .

13. De même, dans le domaine où l'espèce  $HCO_3^-$  prédomine, exprimer  $\log(s)$  en fonction du pH sous la forme  $\log(s) = A_2 + B_2 pH$ , en calculant numériquement  $A_2$  et  $B_2$ .

14. Tracer  $\log(s)$  en fonction du pH, en supposant que les expressions approchées déterminées précédemment sont valides jusqu'aux frontières des domaines de prédominance.

15. La solubilité du carbonate de calcium  $CaCO_3$  vaut environ  $s \approx 15 \text{ mg} \cdot L^{-1}$  dans l'eau pure. Cette valeur est-elle compatible avec les résultats précédents ?

**Données :**

- Masses molaires (en  $g \cdot mol^{-1}$ ) :  $M_H = 1$ ,  $M_C = 12$ ,  $M_{Ca} = 40$ ,  $M_O = 16$ ,  $M_{Fe} = 55$ .
- Numéros atomiques :  $Z(C) = 6$ ,  $Z(O) = 8$ ,  $Z(Ca) = 20$ .
- Conductivités ioniques molaires  $\lambda_0$ , en  $mS \cdot m^2 \cdot mol^{-1}$  :

| Ion         | $H_3O^+(aq)$ | $Cl^-(aq)$ | $HO^-(aq)$ | $Ca^{2+}$ |
|-------------|--------------|------------|------------|-----------|
| $\lambda^0$ | 35,0         | 7,6        | 19,8       | 11,9      |

- Constantes d'acidité :  $pK_{a1}(H_2CO_3/HCO_3^-) = 6,4$ ,  $pK_{a2}(HCO_3^-/CO_3^{2-}) = 10,4$

- Produits de solubilité :  $K_s(CaCO_3) = 3 \cdot 10^{-9}$ .  $K_s(Ca(OH)_2) = 5 \cdot 10^{-6}$ .