

Introduction : les différents régimes

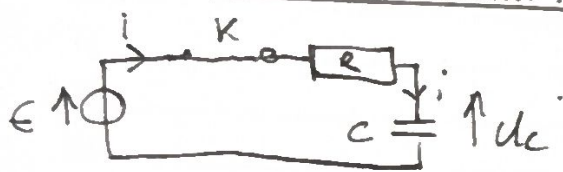
Lors du changement d'alimentation d'un circuit, on observe deux moments :

- Premier moment : le régime transitoire. Il dépend des conditions initiales et s'amortit rapidement.
- Deuxième moment : le régime permanent (ou établi ou forcé). Il est indépendant des conditions initiales et dure jusqu'au prochain changement.

On étudie deux régimes transitoires particuliers :

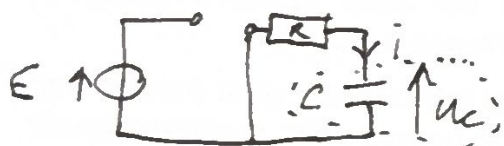
- le régime libre : c'est le régime que l'on observe lorsqu'on laisse évoluer un circuit ne contenant pas de sources, avec des conditions initiales non nulles.
- la réponse à un échelon de tension ou de courant. Ce régime correspond à l'établissement d'un régime continu.

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/chargeRC_TS.php



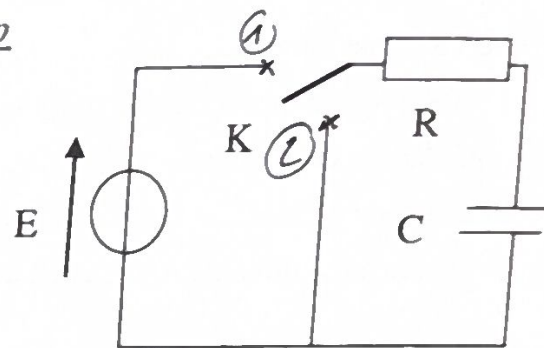
C initialement déchargée se charge sous l'action du générateur E

$$\text{En CVR: } q = C u_C \quad u_C = \frac{q}{C}$$

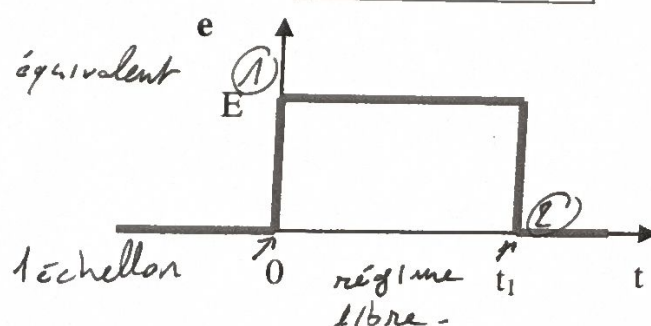
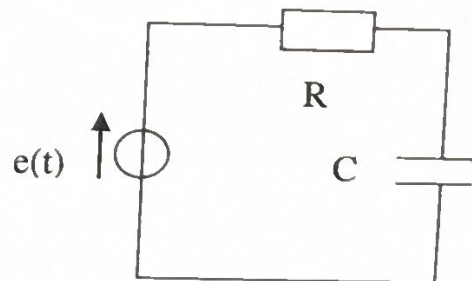


C se comporte comme un générateur. $u_C \searrow$, C se décharge dans R jusqu'à avoir $u_C = 0$

$Rq : i < 0$ cad circule en sens inverse du sens indiqué.



On utilise en général un GBF (générateur basses fréquences) avec un signal créneau, plutôt que d'utiliser un générateur continu avec un interrupteur.



Circuit RC série

1.) Condensateur idéal.

Définition

Pour un condensateur idéal en convention récepteur, la tension et charge sont liés par la loi : $q_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ où C est une constante positive appelée capacité du condensateur. C en FARRAD (F)

La tension et l'intensité sont liées par la loi : $i = C \frac{du_C}{dt}$

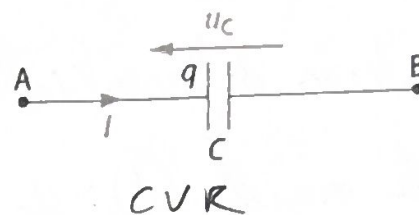
$$R_q \quad i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (C u_C) = C \frac{du_C}{dt}$$

car C constante.

en régime continu permanent.

(i, u) toutes les grandeurs sont constantes. $u_C = \text{cst} \Rightarrow i = 0$

Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.



b) Puissance et énergie reçues : $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

Propriété : La tension aux bornes d'un condensateur et sa charge sont des fonctions continues du temps (au sens des mathématiques).

CVR $P(t) = u_C(t) \times i(t)$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow P(t) = u_C \times C \frac{du_C}{dt}$$

$R_q: (f^2)' = 2 f f'$

$$(u_C^2)' = 2 u_C u_C'$$

$$P(t) = C \times \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u_C^2 \right) \quad \text{Cst.}$$

$$P(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)$$

R_q : sinon on a une puissance ∞ , impossible

R_q : redérivier pour vérifier.

$$P(t) = \frac{d \mathcal{E}_C}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$$

$$u_C = \frac{q}{C} \Rightarrow \mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C \left(\frac{q}{C} \right)^2$$

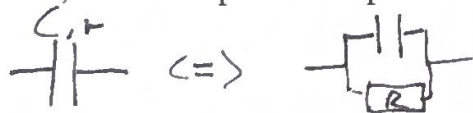
$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

L'énergie est toujours continue (au sens des math)

→ à une constante près choisie nulle.
donc $q(t)$ et $u_C(t)$ aussi *

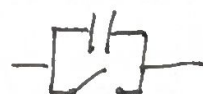
c) Condensateur réel

Il est constitué de deux plaques conductrices séparées par un isolant. L'isolant peut ne pas être parfait, et laisser passer un peu de courant.



Condensateur parfait $\Rightarrow R \infty \Rightarrow i = 0$ dans R

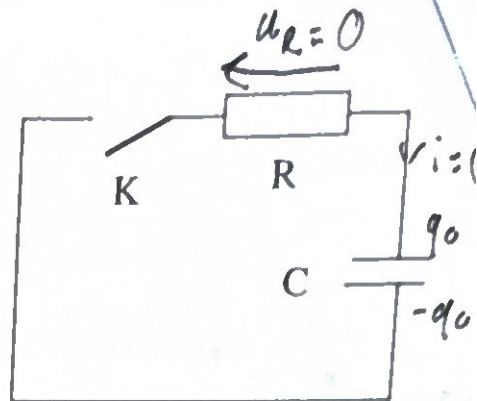
On remplace R par interrupteur ouvert.



2.) Régime libre

Avant fermeture de l'interrupteur K, le condensateur est chargé et aucun courant ne circule dans le circuit.

Pour $T < 0$ $\left| \begin{array}{l} u_c = u_{c0} \\ i = 0 \end{array} \right.$



A $t=0$, on ferme l'interrupteur. Pour $t>0$, on cherche à observer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur, ainsi que la charge portée par l'armature du condensateur, et l'intensité du courant circulant dans ce circuit.

① Equation différentielle sur u_c

Eqn de maille ①: $u_c + u_R = 0$

où $u_R = Ri$ (CVR)

$i = C \frac{du_c}{dt}$ (CVR)

$$u_c + RC \frac{du_c}{dt} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = 0 \quad \text{où } u_c(t) = 0,37 u_{c0}$$

② Résolution: $\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{RC} u_c$

séparation des variables

$$\int \frac{du_c}{u_c} = - \int \frac{1}{RC} dt = -\frac{1}{RC} \int dt$$

On cherche une primitive:

Rq $\int dx = x + \text{cst}$

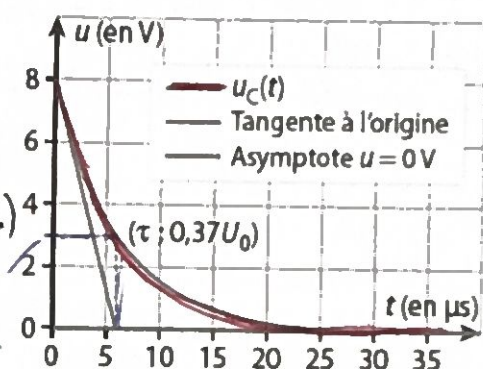
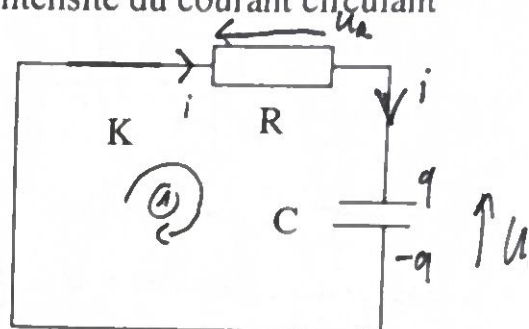
$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} x dx = \ln(x) + \text{cst}$$

$$\ln u_c = -\frac{1}{RC} t + \text{cst}$$

$$\exp(\ln u_c) = \exp\left(-\frac{1}{RC} t + \text{cst}\right)$$

$$u_c = \exp(\text{cst}) \times \exp\left(-\frac{1}{RC} t\right)$$

$$u_c(t) = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$



Rq $y = u_c(t) \quad y' = \frac{du_c}{dt}$

$$y' = \alpha y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \alpha$$

③ Déterminer A

$E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$ est une fonction continue du temps donc aussi u_c .

$$u_c(t=0^-) = u_c(t=0^+)$$

juste avant juste après

$$u_{c0} = A \exp(0)$$

$$u_{c0} = A$$

$$u_c(t) = u_{c0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

où $\tau = RC$ constante de temps ou temps de relaxation

④ tracé de la courbe.

$$u_c \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow +\infty$$

$$t = \tau \quad u_c(\tau) = u_{c0} \exp(-1) = 0,37 u_{c0}$$

équation de la tangente à l'origine.

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a} \Leftrightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$u_c(0) = u_{c0}$$

$$\frac{du_c}{dt} = u_{c0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left(-\frac{1}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(0) = -\frac{u_{c0}}{\tau}$$

$$\text{tangente } y = u_{c0} - \frac{u_{c0}}{\tau}(t - 0)$$

$$y = u_{c0} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

$$\text{pour } t = \tau \quad y = 0$$

Coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$

Rq: temps au bout duquel $u_c(t) = \frac{u_{c0}}{100}$

$$u_c(t) = u_{c0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{u_{c0}}{100}$$

$$-\frac{t}{\tau} = -\ln(100)$$

$$t = \tau \ln(100) \quad t = 4,6 \tau$$

Au bout de 5τ le régime permanent est atteint (la courbe rejoint son asymptote)

⑤ Autres grandeurs.

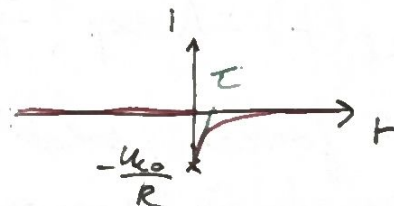
$$\text{charge } q = C u_c$$

$$\text{intensité } (i = \frac{C du_c}{dt})$$

$$\text{ou } ① u_r + u_c = 0$$

$$\Rightarrow R i + u_c = 0 \Rightarrow i = -\frac{u_c}{R}$$

$$i(t) = -\frac{u_{c0}}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



Rq: On observe en fait une variation très rapide de i à $t=0$

Rq: Pour obtenir les valeurs à $t \rightarrow \infty$

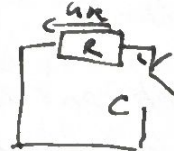
Régime continu permanent $\Rightarrow$

tous les grandeurs sont constantes.

$$i = C \frac{du_c}{dt} \quad u_c = \text{cste} \Rightarrow i = 0$$

$C \Rightarrow$ interrupteur ouvert

$$\text{A } t \rightarrow \infty \quad i = 0 \Rightarrow u_R = 0 \Rightarrow u_c = 0$$

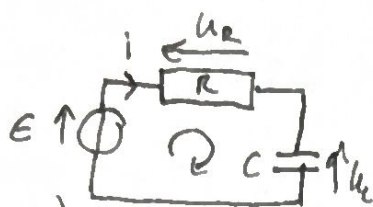


3.) Réponse à un échelon de tension

Pour $t < 0$ $i = 0$ $u_c = 0$

à $t = 0$ on ferme K

pour $t > 0$



① Équa diff sur u_c (CVR)

$$E - u_R - u_c = 0 \quad u_R = Ri$$

$$E = Ri + u_c \quad i = C \frac{du_c}{dt}$$

$$E = RC \frac{du_c}{dt} + u_c$$

$$\Rightarrow \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = \frac{E}{RC}$$

② Résolution

Solution libre, solut^o de l'équat^o si second membre.

$$\frac{du_{cl}}{dt} + \frac{1}{RC} u_{cl} = 0$$

$$\Rightarrow u_{cl}(t) = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Solut^o forcée, solut^o particulière de l'éq du m^e type que le 2^d membre $\frac{E}{RC}$ cst $\Rightarrow u_{cf}$ cst

$$\textcircled{1}' \quad \frac{du_{cf}}{dt} + \frac{1}{RC} u_{cf} = \frac{E}{RC}$$

$$u_{cf} = E$$

Solut^o complète: $u_c(t) = u_{cl}(t) + u_{cf}$

$$u_c(t) = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \frac{u_{cf}}{E} = E$$

③ déterminat^o de A .

$$E_c = \frac{1}{2} C u_c^2 \text{ est constante donc } u_c \text{ aussi.}$$

$$u_c(t=0^-) = u_c(t=0^+)$$

$$0 = A \exp(0) + E$$

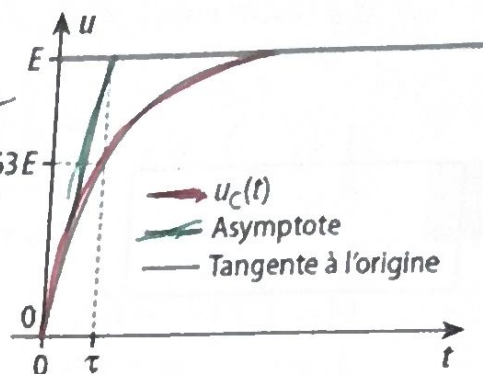
$$A = -E$$

$$u_c(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

$$\text{ou } \tau = RC$$

④ Courbe

Au bout de 5τ , on atteint le régime permanent continu $u_c \rightarrow E$



⑤ Autres

Grandeurs

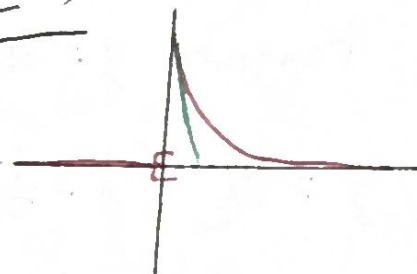
$$\text{Charge } q = C u_c$$

$$\text{Intensité: } i = \frac{C du_c}{dt} \text{ ou } E = Ri + u_c$$

$$i = \frac{E - u_c}{R}$$

$$= \frac{E - [E - E \exp(-\frac{t}{\tau})]}{R}$$

$$i = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

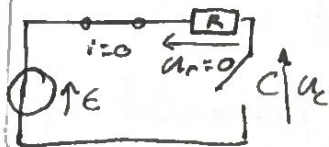


Rq) au 2), $i < 0$, circule en sens inverse du sens choisi $|i| > 0$ donc sens indiqué.

Rq2: à $t \rightarrow \infty$: Régime permanent continu toutes les grandeurs sont constantes

$$u_c = \text{cst} \Rightarrow i = \frac{C du_c}{dt} = 0$$

$C(=)$ interrupteur ouvert.



eqa de maille ①

$$E = Ri + u_c \Rightarrow u_c(t \rightarrow \infty) = E$$

4.) Aspect énergétique

Equation de maille: $e = Ri + u_C$ ①

① $\times i$: $\underbrace{e \times i}_{\text{CVG}} = \underbrace{Ri^2 + u_C \times i}_{\text{CVR}}$

$P_{\text{fournie par g\u00e9n\u00e9rateur}} = P_{\text{re\u00e7u par R}} + P_{\text{re\u00e7u par C}}$

$i = \frac{C du_C}{dt} \Rightarrow ei = Ri^2 + u_C \times C \frac{du_C}{dt}$

① $ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)$

$P_R = Ri^2 > 0$ dissip\u00e9e par effet joule sous forme de chaleur.

① on l'int\u00e8gre:

$\int_0^t ei dt = \int_0^t Ri^2 dt + \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) dt$

$E_{\text{fourni par g\u00e9n de 0 \u00e0 t}} = E_{\text{re\u00e7u par R de 0 \u00e0 t}} + E_{\text{re\u00e7u par C de 0 \u00e0 t}}$

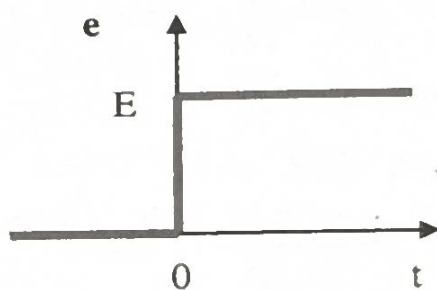
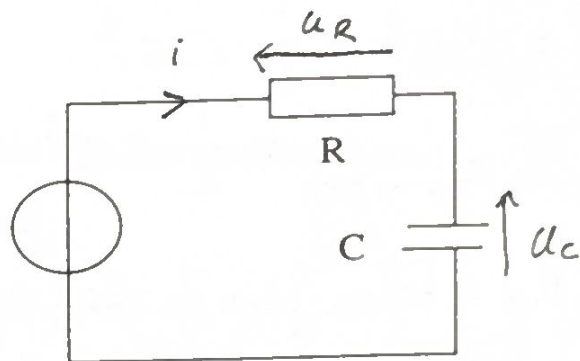
Energie re\u00e7ue par C de 0 \u00e0 $t \rightarrow \infty$

$E_{C \rightarrow \infty} = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) dt = \left[\frac{1}{2} C u_C^2 \right]_{t=0}^{t \rightarrow \infty}$
 $= \frac{1}{2} C (u_C^2(t \rightarrow \infty) - u_C^2(t=0^+))$

$Rq: \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)_{e(t)}$
 $= \frac{1}{2} C \frac{d(u_C^2)}{dt}$

$u_C(t) = f(t)$

$(f^2)' = 2f f'$
 $= 2u_C \times \frac{du_C}{dt}$



Rq: Pour $t < 0$. R\u00e9gime permanent continue

$C(=)$ int ouvert

$\Rightarrow i = 0 \Rightarrow u_R = 0 \Rightarrow u_C = 0$



Pour $t > 0$

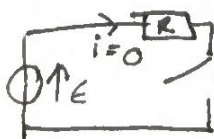
$\Delta E_C = \frac{1}{2} C u_C^2$ est continue, donc $\in \uparrow \odot$

u_C aussi $u_C(0^+) = u_C(0^-) \Rightarrow u_C(0^+) = 0$

\u00e0 $t \rightarrow \infty$ r\u00e9gime permanent continue.

$C(=)$ int ouvert $i = 0 \Rightarrow u_R = 0 \Rightarrow u_C(t \rightarrow \infty) = E$

$E_{C \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} C E^2$



" Energie fournie par le gène
de $t=0$ à $t=\infty$

$$\begin{aligned} E_{\text{gène}}_{0 \rightarrow \infty} &= \int_0^{\infty} E i \, dt \quad (\text{car } e = E) \\ &= \int_0^{\infty} E C \frac{du_c}{dt} \, dt \\ &= CE \int_0^{\infty} \frac{du_c}{dt} \, dt \\ &= CE [u_c]_0^{\infty} \\ E_{\text{gène}}_{0 \rightarrow \infty} &= CE^2 \end{aligned}$$

Bilan: $E_{R 0 \rightarrow \infty} = E_{\text{gène}} - E_C$

$$= CE^2 - \frac{1}{2} CE^2$$

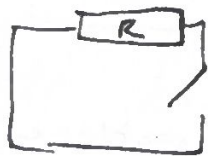
$E_{R 0 \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} CE^2$ dissipée sous
forme de chaleur.

Rq: bilan pour la décharge du condensateur



$$u_c(0^-) = u_c(0^+) = u_{co}$$

Pour $t \rightarrow \infty$



$$u_c(t \rightarrow \infty) = 0$$

Pour $t > 0$

eqn de maille:



$$u_R + u_C = 0$$

$$Ri + u_C = 0$$

① xi: $Ri^2 + u_C i = 0$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow Ri^2 + u_C \times C \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) = 0 \quad \text{car}$$

P_{recu}
par R

P_{recu}
par C

$$\int_0^t Ri^2 \, dt + \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) \, dt = 0$$

Energie reçue par C de $t=0^+$ à $t=\infty$

$$\begin{aligned} E_{C 0 \rightarrow \infty} &= \left[\frac{1}{2} C u_C^2 \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} C (0^2 - u_{co}^2) \\ &= -\frac{1}{2} C u_{co}^2 < 0 \end{aligned}$$

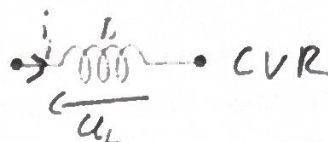
C fournit de l'énergie:

se comporte c un gène

$$E_{R 0 \rightarrow \infty} + E_{C 0 \rightarrow \infty} = 0$$

1.) Bobine idéale.

a) Définition



Pour une bobine idéale en convention récepteur, la tension et l'intensité sont liés par la loi : $u_L = L \frac{di}{dt}$
où L est une constante positive appelée inductance propre de la bobine. Henry H

Ordres de grandeur de l'inductance :

$$L = C_1 \ln TP$$

L varie de quelques μH (1 spire) à quelques mH (1000 spires sans noyau de fer)

$L \cong 1H$ pour une bobine de 1000 spires avec noyau de fer

$L \cong 10\text{ H}$ à 100 H pour les électroaimants

R_1 : En régime permanent continue, toutes les grandeurs sont constantes
 $i = \text{cst} \Rightarrow u_2 = 0$ $L \Rightarrow$ interrupteur fermé (fil) 

b) Puissance et énergie reçues : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} Li^2$

Propriété : L'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps (au sens des mathématiques).

$$P = a \times i \quad u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow P = L i \times \frac{di}{dt}$$

$$P_L = \frac{dE_L}{dt} \Rightarrow E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

$E_L(t)$ est une fonction continue du temps
donc i aussi (On ne peut pas avoir $P \propto$)

c) Bobine réelle

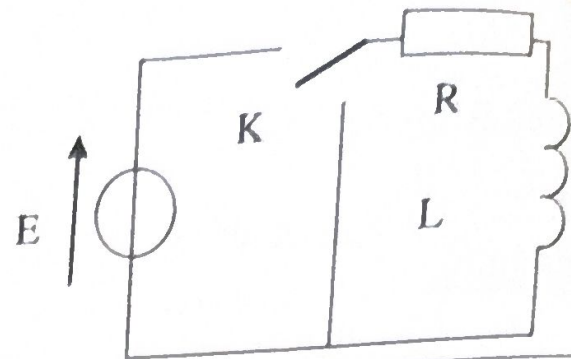
c) Bobine réelle
Enroulement d'un fil conducteur (cuivre) sur un support non magnétique, ou sans support.

Bobine réelle :  $(=)$ 

Δ bobine parfaite $r=0 \Rightarrow$ 

2.) Régime libre

Pour $t < 0$, l'interrupteur est en position 1 depuis très longtemps.
 A $t=0$, on passe l'interrupteur en position 2.



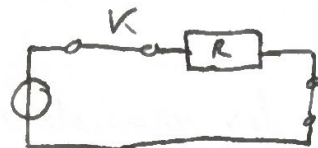
Méthode :

1. Equation de maille, qui permette de trouver une équation différentielle sur la grandeur qui nous intéresse.
2. Résolution de l'équation : solution complète = solution libre + solution forcée.
3. Détermination des constantes, en utilisant la continuité du courant dans une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur.

Pour $t < 0$

régime permanent

continue :

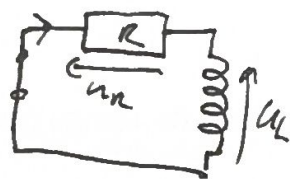


$$L \Rightarrow \text{int fermé } (u_L = L \frac{di}{dt} = 0)$$

si $i = \text{cst}$

$$E = Ri \Rightarrow i = \frac{E}{R} \text{ pour } t < 0$$

Pour $t > 0$



① equa diff sur i

$$u_L + u_R = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (1')$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i \Rightarrow \int \frac{di}{i} = \int -\frac{R}{L} dt$$

$$\ln(i) = -\frac{R}{L} t + \text{cst}$$

$$i = A \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)$$

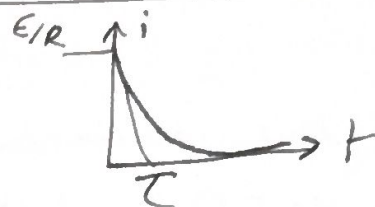
3) déterminer les constantes

$E_L = \frac{1}{2} L i^2$ est continue donc i aussi :

$$i(0^-) = i(0^+) \Rightarrow \frac{E}{R} = A$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ ou } \tau = \frac{L}{R}$$

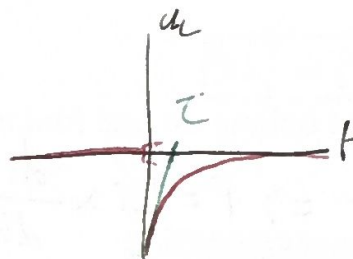
4) Courbe



Rq : Autre grandeur : $u_L = L \frac{di}{dt}$

$$\text{ou } 0 = Ri + u_L \Rightarrow u_L = -Ri$$

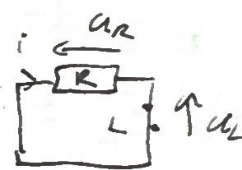
$$u_L = -E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



Rq à $t \rightarrow \infty$

$L \Rightarrow \text{fil}$

$$\Rightarrow u_L = 0 \Rightarrow u_R = 0 \Rightarrow i = 0$$



3.) Réponse à un échelon de tension

Pour $t < 0$:

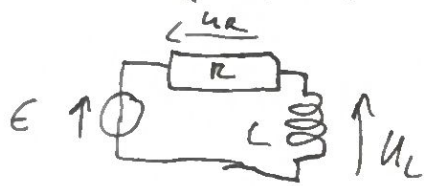
Régime permanent continu.



$$L \Rightarrow i = 0 \Rightarrow u_L = 0 \Rightarrow u_R = 0 \Rightarrow i = 0$$

Pour $t > 0$

équa diff sur i



$$E = u_R + u_L$$

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L} \quad (1')$$

② résoudre:

Solution libre: $\frac{di_l}{dt} + \frac{R}{L} i_l = 0$

$$\Rightarrow \frac{di_l}{dt} = -\frac{R}{L} i_l$$

$$i_l(t) = A \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)$$

Solutⁿ forcée: 2nd membre $\frac{E}{L}$ est une cst donc i_f aussi

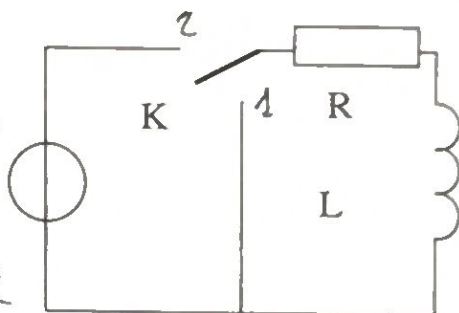
$$\frac{di_f}{dt} + \frac{R}{L} i_f = \frac{E}{L} \Rightarrow i_f = \frac{E}{R}$$

$$= 0$$

Solution complète:

$$i(t) = i_p(t) + i_f$$

$$i(t) = A \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) + \frac{E}{R}$$



3) Déterminer les cst:

$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$ est continue donc i aussi:

$$i(0^-) = i(0^+) \Rightarrow 0 = A + \frac{E}{R}$$

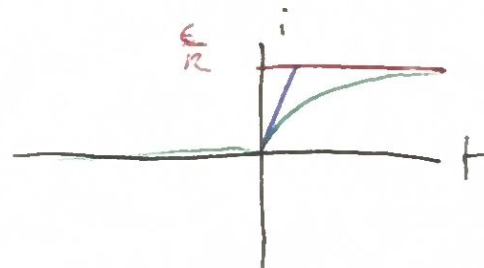
$$A = -\frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \text{ où}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Compte

$t \rightarrow +\infty \quad i \rightarrow \frac{E}{R}$
(exp $\rightarrow 0$ tend vers 0)

Rq trouver u_L



Rq trouver $i(t \rightarrow \infty)$ par le schéma équivalent.