

DS 1 : Optique et analyse dimensionnelle - Samedi 26 septembre

PTSI La Martinière Monplaisir

Durée : 4 heures

⇒ Les calculatrices sont interdites ⇐

Veiller à la clarté de la rédaction et à l'homogénéité des équations. Présenter les résultats sous forme littérale avant de faire les applications numériques. Mettre en évidence (encadrer, souligner...) les résultats. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement ajusté au moment de la correction.

Les différentes parties sont indépendantes et peuvent être abordées dans l'ordre de votre choix.

On donne les formules de conjugaison et de grandissement pour une lentille mince de distance focale image $f' = \overline{OF'}$ et de distance focale objet $f = \overline{OF} = -f'$:

Avec origine au centre (Descartes) : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ et $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

Avec origine aux foyers (Newton) : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$ et $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$.

I Analyse dimensionnelle appliquée à la mécanique (environ 16% des points)

On considère un objet de masse m , au bout d'un ressort de raideur k , soumis à une force de frottement de la forme $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. La force de raideur exercée par le ressort sur l'objet s'écrit $\vec{F}_r = -kx\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire (sans dimension).

1. Quelle est la dimension (ou l'unité) de la quantité $\omega_0 = \sqrt{k/m}$? Quelle est celle du coefficient de frottement α ?

2. On appelle facteur de qualité la quantité $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$. Montrer que Q est sans dimension.

3. Pour un objet sphérique de rayon r , le coefficient de frottement est relié à la viscosité η du fluide et au rayon de l'objet par la relation $\alpha = 6\pi\eta r$. Quelle est la dimension de η ?

Dans le cadre de la mécanique des fluides, on introduit le *nombre de Reynolds* Re , quantité sans dimension faisant intervenir la viscosité η , la vitesse v , le rayon r et la masse volumique ρ du fluide :

$$Re = \frac{v^a r^b}{(\eta/\rho)^c}.$$

4. Déterminer les plus petites valeurs entières non nulles des exposants a , b et c permettant d'assurer que Re est sans dimension.

5. Lorsque Re prend des valeurs très élevées, la force de frottement exercée par le fluide sur l'objet change d'expression et s'écrit sous la forme $\vec{f} = -\frac{1}{2}C\rho^{a_1} \cdot (\pi r^2)^{a_2} v^{a_3} \vec{u}$, avec C un coefficient constant sans dimension, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire lui aussi sans dimension. Déterminer les valeurs des exposants a_1 , a_2 et a_3 .

II Fibre optique (environ 29% des points)

De nos jours, les autoroutes de l'information offrent la possibilité de transmettre des données, de la voix, des images, etc. d'un bout à l'autre de la planète. Aujourd'hui, 80% du trafic mondial longue distance se fait par fibres optiques. Ces dernières ont en effet de multiples avantages par rapport aux câbles électriques classiques : elles sont plus robustes et sont très peu sensibles aux interférences électromagnétiques. Mais surtout, les technologies de télécommunications par fibres optiques, en constante amélioration depuis une trentaine d'années, permettent de transmettre des informations sur de très longues distances et à de très hauts débits.

On s'intéresse, dans ce problème, à la propagation de la lumière dans une fibre optique.

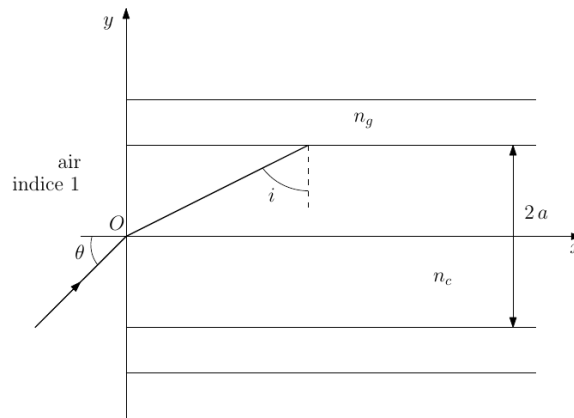


FIGURE II.1 – Fibre optique. Schéma de principe

Une fibre optique à faut d'indice (cf. figure II.1) est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe (Ox), de diamètre $2a$ et d'indice n_c , entouré d'une gaine optique d'indice n_g légèrement inférieur à n_c . Un rayon situé dans le plan (Oxy) entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ .

II.1 Condition de propagation

1. Rappeler les lois de Snell-Descartes à la réfraction et à la réflexion. On s'appuiera sur un schéma.
2. Établir la condition sur i , angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, pour que le rayon reste confiné à l'intérieur du cœur. On note i_L l'angle d'incidence limite. Faire un dessin du trajet ultérieur du rayon en faisant apparaître plusieurs réflexions.
3. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_L , à exprimer. En déduire l'expression de l'ouverture numérique ON de la fibre, définie par $ON = \sin \theta_L$, en fonction de n_c et n_g uniquement.

II.2 Injection du signal

On injecte la lumière dans la fibre optique à l'aide d'une lentille mince convergente (L) de diamètre D et de distance focale image f' . Celle-ci est éclairée par un faisceau rectiligne incident parallèle à l'axe optique (cf. fig. II.2).

4. Où doit-on mettre la lentille pour que le faisceau converge au point O, situé à l'entrée de la fibre optique ?
5. Déterminer l'inégalité que doit satisfaire le rapport D/f' en fonction de ON pour que toute la lumière traversant la lentille se propage à l'intérieur de la fibre.

On appelle puissance lumineuse la puissance transportée par l'onde lumineuse. On peut montrer à partir des lois de l'électromagnétisme que la lumière ne peut pas passer entièrement à l'intérieur de la fibre. En effet, à l'interface air/verre, il passe uniquement une fraction $\alpha < 1$ de la puissance lumineuse, donnée par $\alpha = \frac{4n_c}{(n_c + 1)^2}$.

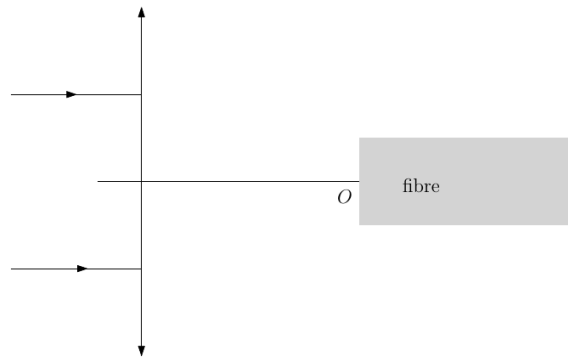


FIGURE II.2 – Entrée du signal dans la fibre optique - Schéma de principe.

6. Que devient la fraction non transmise dans la fibre ?

Pour l'étude des fibres optiques, il est d'usage de raisonner en décibels. La variation de puissance entre un point A et un point B est quantifiée par la grandeur $G_{dB} = 10 \log \left(\frac{P_B}{P_A} \right)$, exprimée en dB (abréviation de décibel), où P désigne la puissance lumineuse et log le logarithme décimal.

7. Détermine l'expression de la perte de puissance lors de l'injection dans la fibre. *On ne fera pas l'application numérique.*

8. À la sortie de celle-ci, il y a à nouveau une perte de puissance à l'interface verre/air de même valeur qu'à l'entrée. Calculer alors la perte de puissance totale en dB entre l'entrée et la sortie de la fibre (on négligera dans cette question les pertes à l'intérieur de la fibre). *On ne fera pas l'application numérique.*

II.3 Fibre courbée

On éclaire la fibre sous incidence normale et on la courbe (cf. fig. II.3).

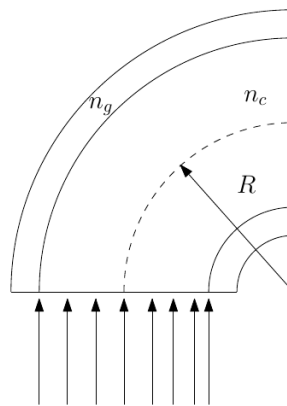


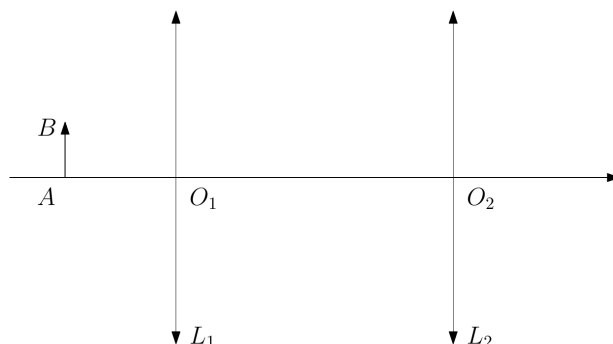
FIGURE II.3 – Fibre optique courbée.

9. Quel est le rayon lumineux qui a un angle d'incidence minimal à l'interface cœur /gaine ?

10. On souhaite que toute la lumière incidente traverse la fibre. Montrer que le rayon de courbure R doit être supérieur à un rayon de courbure minimal R_{min} que l'on exprimera en fonction de a , n_c et n_g . Faire un schéma.

III Microscopie optique (environ 38% des points)

Le microscope est modélisé sur la figure ci-dessous, par un système de deux lentilles minces convergentes, l'une constituant l'objectif (lentille L_1 de centre O_1 et de distance focale image f'_1), et l'autre constituant l'oculaire (lentille L_2 de centre O_2 et de distance focale image f'_2).



On fixe $\overline{O_1O_2} = D_0$. On choisit le sens positif dans le sens de propagation de la lumière.

1. Les relations de conjugaison d'une lentille et les formules de grandissement transversal sont valables à condition que les rayons lumineux satisfont les conditions de Gauss. Donner ces deux conditions.

2. Décrire un protocole expérimental mettant en œuvre la méthode d'autocollimation pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente. On s'appuiera notamment sur un tracé de rayons.

3. Si F'_1 est le foyer image de L_1 et F_2 le foyer objet de L_2 , on définit l'intervalle optique par la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F'_1F_2}$. Exprimer Δ en fonction de f'_1 , f'_2 , D_0 .

Un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique est éclairé et placé à une distance d de L_1 , à sa gauche, de façon à ce que l'image A_1B_1 donnée par l'objectif, appelée image intermédiaire, se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire.

4. Exprimer d en fonction de f'_1 et Δ .

5. Exprimer le grandissement γ_1 induit par l'objectif en fonction de f'_1 et Δ .

6. Quel est l'intérêt pour l'observateur de cette position de l'objet ?

7. Faire une construction géométrique faisant apparaître l'objet, l'image intermédiaire, ainsi que l'angle α' sous lequel est observée l'image finale à travers le microscope. Le schéma n'est pas à faire à l'échelle mais il faut respecter $f'_1 < f'_2$.

Le grossissement commercial du microscope est défini par $G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right|$ où α est l'angle sous lequel serait vu l'objet à l'œil nu placé à une distance D .

L'objet étant de très petite taille, ces deux angles seront bien sûr très faibles.

8. Que représente D ? Pourquoi prend-on cette valeur ? Exprimer G en fonction de Δ , D , f'_1 et f'_2 .

9. Quelle est la dimension minimale de l'objet que l'on peut observer à travers ce microscope ? On note α_{min} la limite de résolution angulaire de l'œil.

On appelle cercle oculaire l'image de l'objectif à travers l'oculaire.

10. Déterminer la position O_c du cercle oculaire par rapport à L_2 .

11. Le diamètre de l'objectif est d_{ob} , déterminer le diamètre d_{oc} du cercle oculaire.

12. On place l'œil au niveau du cercle oculaire. Quel est l'intérêt ?

13. On place l'œil en F'_2 . Sachant que la distance minimale de vision distincte est D , de quelle distance maximale d_{max} peut-on déplacer l'objet AB pour qu'il reste visible ? Commenter sachant que cette distance est de l'ordre de la centaine de μm .

IV Constructions (environ 17% des points)

Dans les deux situations des figures en annexe, l'objet est noté AB , l'image intermédiaire par la lentille L_1 est notée A_1B_1 , et l'image par l'ensemble du doublet est notée A_2B_2 . Le centre de la lentille L_i est O_i , et ses foyers objet et image sont F_i et F'_i . Le côté d'un carreau est noté a .

1. Réaliser les deux constructions sur l'annexe. **Penser à rendre l'annexe avec la copie, même si vous ne l'avez pas complétée.**

2. Pour chacune des constructions, retrouver par le calcul la position et la taille de l'image. On notera A_2B_2 l'image par le doublet et on donnera la valeur de $\overline{O_2A_2}$ pour la position, et celle de $\overline{A_2B_2}$ pour la taille.

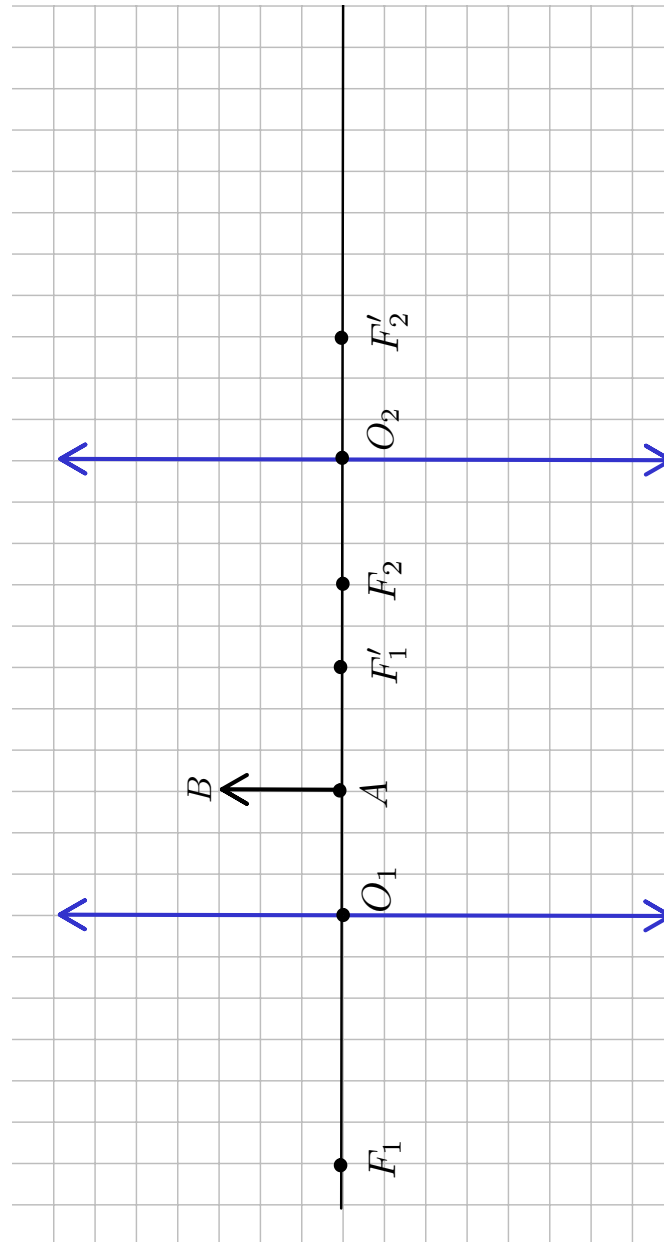
NOM :

Prénom :

Cette annexe est à rendre avec la copie, même si vous ne l'avez pas complétée
ATTENTION : l'annexe comporte deux pages

Construction 1

Effectuer le tracé de rayon permettant de déterminer la position de l'image A_2B_2 dans la figure suivante :



Construction 2

Effectuer le tracé de rayon permettant de déterminer la position de l'image A_2B_2 dans la figure suivante :

