

Ex 10

$$(E) : \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Posons } F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1)$$

Par composition et somme, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1}{1+(x+1)^2} > 0$$

donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• De plus F est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle)

donc d'après le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $F(\mathbb{R})$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \text{ donc par composition et somme,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\pi$$

$$\text{En raisonnant de façon similaire, on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

$$\text{donc } F(\mathbb{R}) =]-\pi; \pi[$$

$$\frac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi[\text{ donc l'équation } F(x) = \frac{\pi}{4} \text{ admet une unique solution.}$$

$$\bullet \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Remarquons que } F(0) = 0 < \frac{\pi}{4} \text{ et } F(1) = \operatorname{Arctan}(2) > \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

donc l'unique solution appartient à l'intervalle $]0; 1[$

$$\text{si } 0 < x < 1 \text{ alors } -1 < x-1 < 0 \text{ et } 1 < x+1 < 2$$

$$\text{par stricte croissance de } \operatorname{Arctan}, \operatorname{Arctan}(-1) \leq \operatorname{Arctan}(x-1) \leq \operatorname{Arctan}(0)$$

$$\text{et } \operatorname{Arctan}(1) \leq \operatorname{Arctan}(x+1) \leq \operatorname{Arctan}(2) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{c'est-à-dire } -\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arctan}(x-1) \leq 0 \text{ et } \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arctan}(x+1) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ainsi, } 0 \leq \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{car } \tan \text{ est bijective sur }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

$$\Leftrightarrow \tan(\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(x-1)) + \tan(\operatorname{Arctan}(x+1))}{1 - \tan(\operatorname{Arctan}(x-1)) \tan(\operatorname{Arctan}(x+1))} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1) + (x+1)}{1 - (x+1)(x-1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x = -1 + \sqrt{3}.$$

$$-1 - \sqrt{3} < 0 \text{ donc } F(-1 - \sqrt{3}) < 0 \text{ donc l'unique solution est } -1 + \sqrt{3}.$$