

Chapitre 3. Nouvelles fonctions usuelles.

1 Fonctions hyperboliques ch et sh

Définition :

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(x) = \quad \quad \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) =$$

Ceci définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notées aussi cosh et sinh.

Proposition :

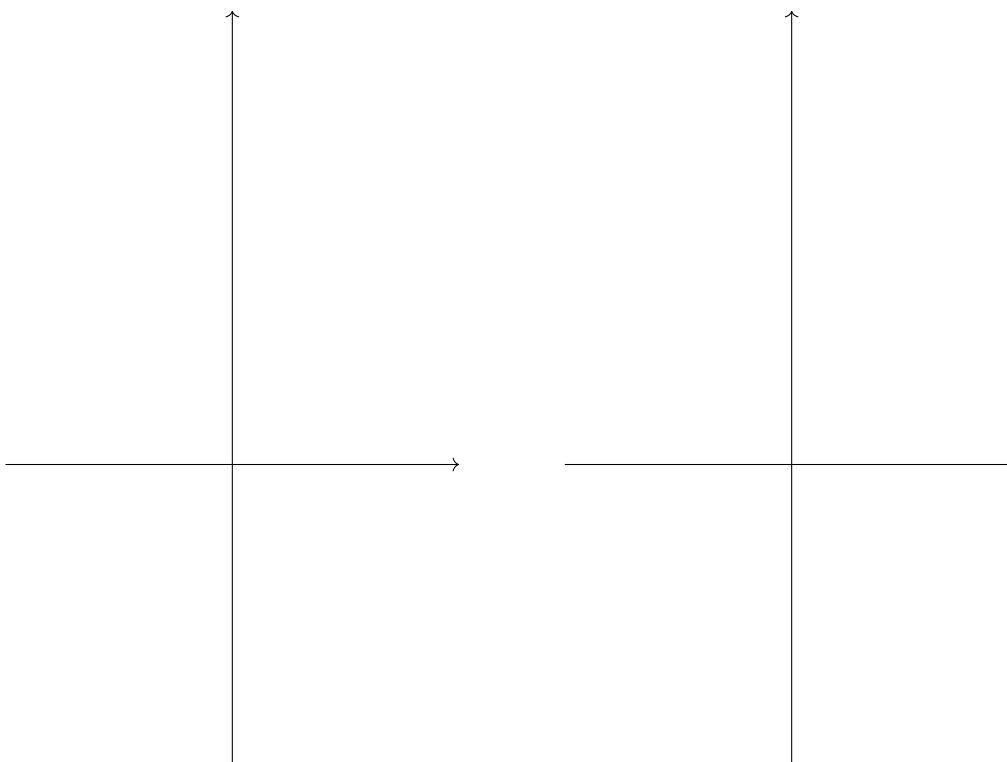
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) + \text{sh}(x) =$
- ch est , sh est
- $\forall x \in \mathbb{R},$.
- ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\text{ch}' =$ $\text{sh}' =$

Démonstration 1

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}(x)$			
$\text{sh}(x)$			

Retenir les informations et conséquences de ce tableau :

- Pour ch :
 - Minimum, signe :
 - Limites :
 - Variations :
 - Tangentes remarquables :
- Pour sh :
 - Signe :
 - Limites :
 - Variations :
 - Tangente remarquable :



2 Rappels et compléments : bijectivité et dérivabilité

Théorème : de la bijection

Soit f une fonction à valeurs réelles,

- définie sur un intervalle I
- continue
- strictement monotone

Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

De plus, la réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue sur $f(I)$, strictement monotone, de même monotonie que f .

Rappel : $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$, et on l'obtient à l'aide des valeurs ou limites de f aux bornes de I .
La phrase " f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ " signifie :

Méthode pour appliquer le théorème de la bijection (en apportant les justifications nécessaires!) :

- Dire que f est bien continue sur I et que I est un intervalle
- Dire que f est strictement monotone (souvent en passant par la dérivée)
- Dire "D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $f(I)$ ".
- Si $f(I)$ n'est pas immédiat à déterminer, trouver les valeurs de f ou les limites de f aux bornes de I , ce qui permet de connaître $f(I)$.
- Ensuite, si on s'intéressait par exemple à l'équation $f(x) = 2$, il faut vérifier que $2 \in f(I)$, et en déduire : "il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = 2$ ".

Théorème : de la dérivée de la réciproque

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone. Notons $J = f(I)$; d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur J .

Soit $y \in J$. On pose $x = f^{-1}(y)$ (de sorte que $y = f(x)$).

On suppose f dérivable en x , alors :

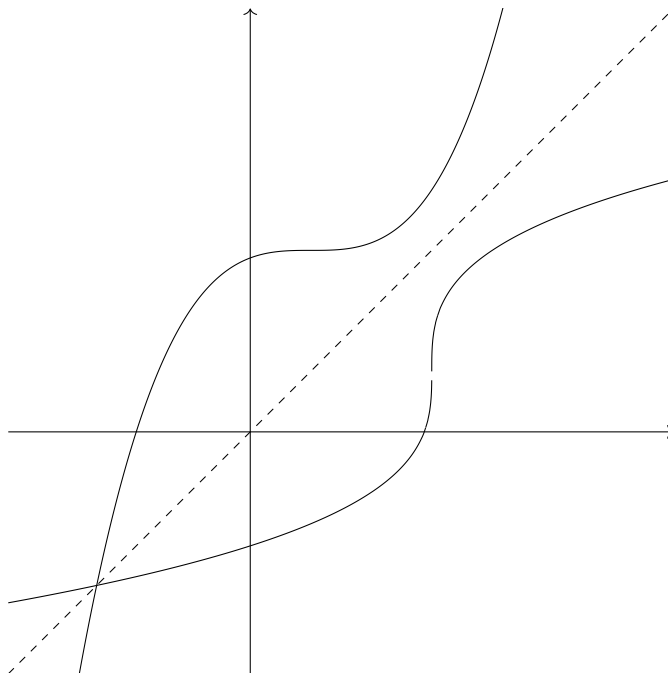
f^{-1} dérivable en $y \iff$

et dans ce cas, on a $(f^{-1})'(y) =$ i.e. $(f^{-1})'(y) =$.

En particulier, si f est dérivable sur I et que f' ne s'annule jamais sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' =$

Démonstration 2

Interprétation graphique



- Si $f(x) = y$ et $f'(x) \neq 0$:
- Si $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = 0$:

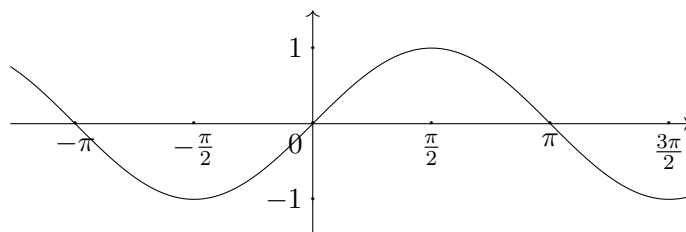
Premier exemple d'application : $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Démonstration 3

3 Fonctions trigonométriques réciproques

3.a Arcsin

La fonction sinus n'est pas bijective :



Théorème-définition :

- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
$$x \mapsto \sin(x)$$

(f n'est pas la fonction sinus).
Sa réciproque f^{-1} est appelée arcsinus, et notée Arcsin .
- La fonction Arcsin est

Démonstration 4

- On a donc :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1, 1], y = \sin x \iff$$

$\text{Arcsin } y$ est l'angle x de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus est égal à y .

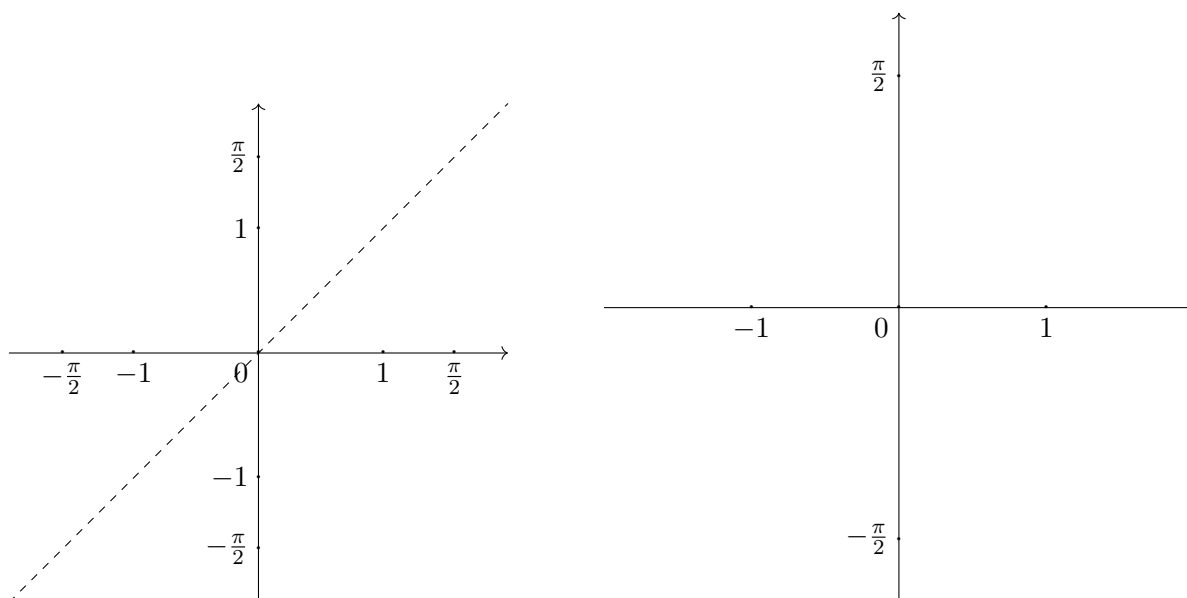
Par exemple,

$$\begin{aligned} \text{Arcsin}(0) &= 0 & \text{Arcsin}(1) &= \frac{\pi}{2} \\ \text{Arcsin}(-1) &= -\frac{\pi}{2} & \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{6} \\ \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{3} & \text{Arcsin}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- On a donc : $\forall y \in [-1, 1], f(f^{-1}(y)) = y$ c'est-à-dire :

A-t-on $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$ pour tout x ?

- La courbe de Arcsin s'obtient à partir de l'arc de courbe de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, par symétrie par rapport à la première bissectrice :



Proposition :

La fonction Arcsin est impaire.

Démonstration 5

Théorème :

Arcsin n'est dérivable que sur $] -1, 1[$, et pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\text{Arcsin}'(x) =$$

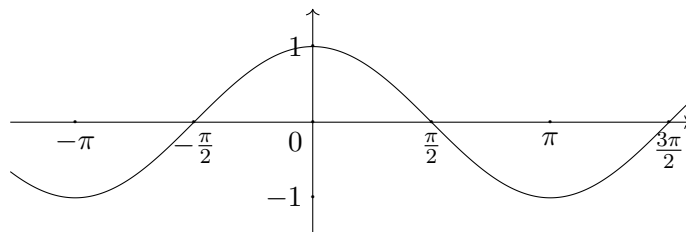
Démonstration 6

Au passage, lors de la démonstration, on a obtenu le résultat intéressant suivant :

$$\forall y \in [-1, 1], \cos(\text{Arcsin}(y)) = \sqrt{1 - y^2}.$$

3.b Arccos

La fonction cosinus n'est pas bijective :



Théorème-définition :

- La fonction $f : \quad \rightarrow \quad$ réalise une bijection de $\quad$ sur $\quad$

$$x \mapsto \cos(x)$$
 (f n'est pas la fonction cosinus).
 Sa réciproque f^{-1} est appelée arccosinus, et notée **Arccos**.
- La fonction **Arccos** est

Démonstration 7

- On a donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1], y = \cos x \iff}$$

$\text{Arccos } y$ est l'angle x de $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal à y .

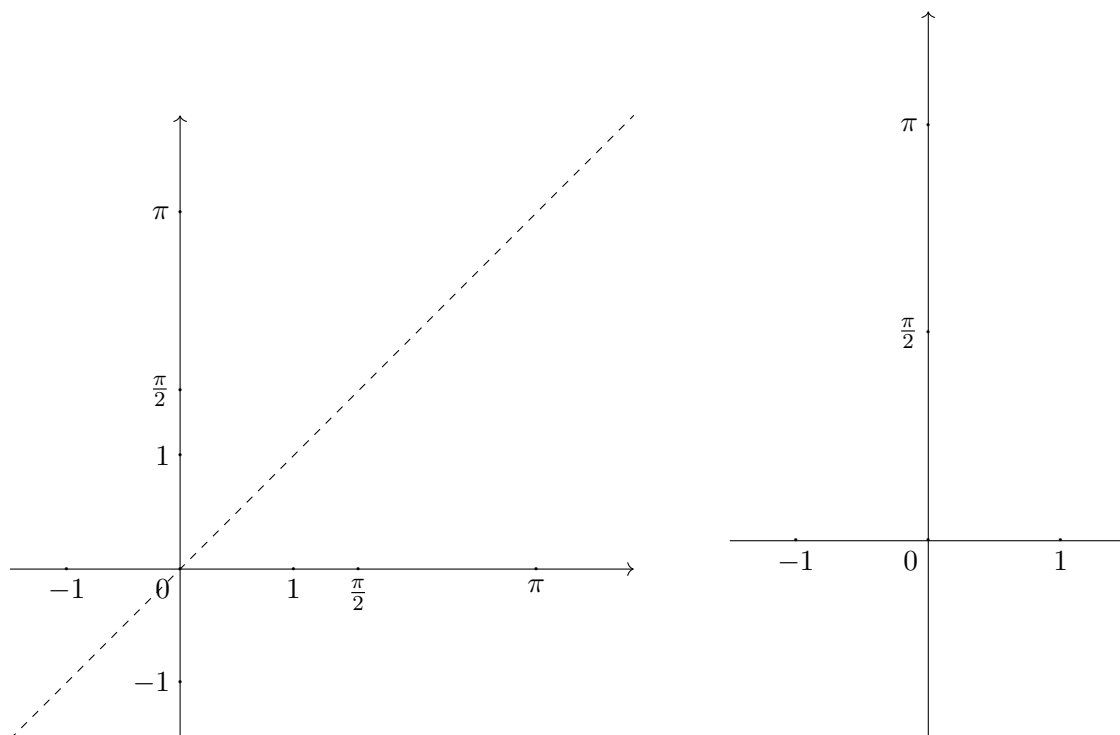
Par exemple,

$$\begin{array}{ll} \text{Arccos}(0) = & \text{Arccos}(1) = \\ \text{Arccos}(-1) = & \text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \\ \text{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = & \text{Arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \end{array}$$

- On a donc : $\forall y \in [-1, 1], f(f^{-1}(y)) = y$ c'est-à-dire :

A-t-on $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$ pour tout x ?

- La courbe de Arccos s'obtient à partir de l'arc de courbe de cos sur $[0, \pi]$, par symétrie par rapport à la première bissectrice :



Théorème :

Arccos n'est dérivable que sur $] -1, 1[$, et pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\text{Arccos}'(x) =$$

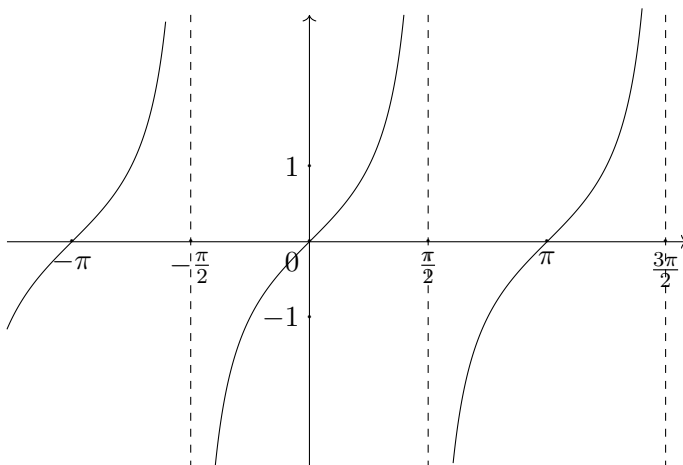
Démonstration 8

Au passage, lors de la démonstration, on a obtenu le résultat intéressant suivant :

$$\forall y \in [-1, 1], \sin(\text{Arccos}(y)) = \sqrt{1 - y^2}.$$

3.c Arctan

La fonction tangente n'est pas bijective :



Théorème-définition :

- La fonction $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-\infty, +\infty[$.
$$x \mapsto \tan(x)$$

(f n'est pas la fonction tangente).
Sa réciproque f^{-1} est appelée arctangente, et notée Arctan .
- La fonction Arctan est définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et strictement croissante.
- On a $\lim_{y \rightarrow -\infty} \text{Arctan } y = -\frac{\pi}{2}$, et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \text{Arctan } y = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration 9

- On a donc :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall y \in \mathbb{R}, y = \tan x \iff$$

$\text{Arctan } y$ est l'angle x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égal à y . Par exemple,

$$\text{Arctan}(0) =$$

$$\text{Arctan}(1) =$$

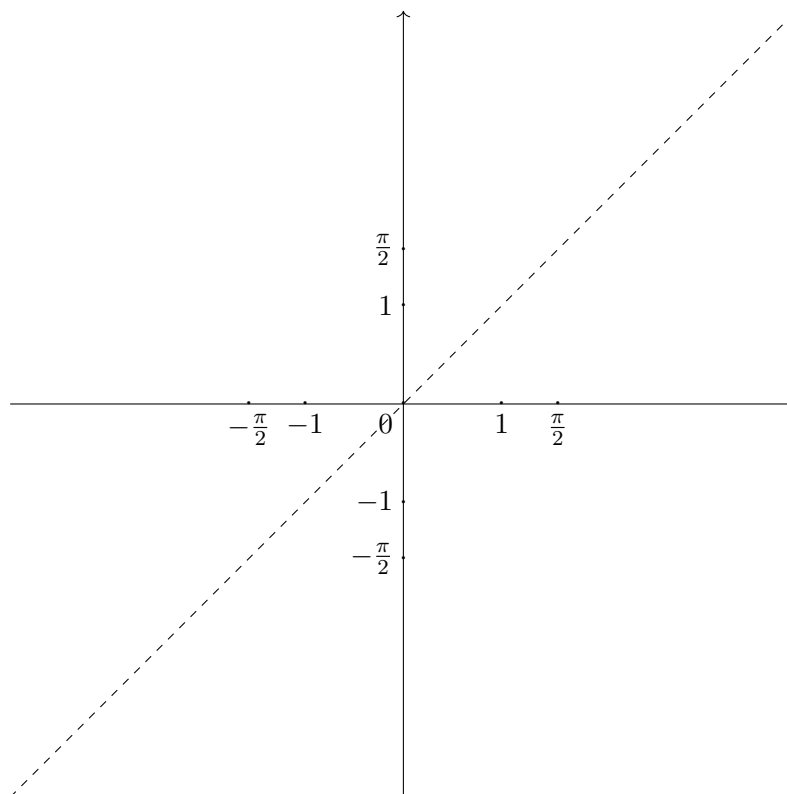
$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

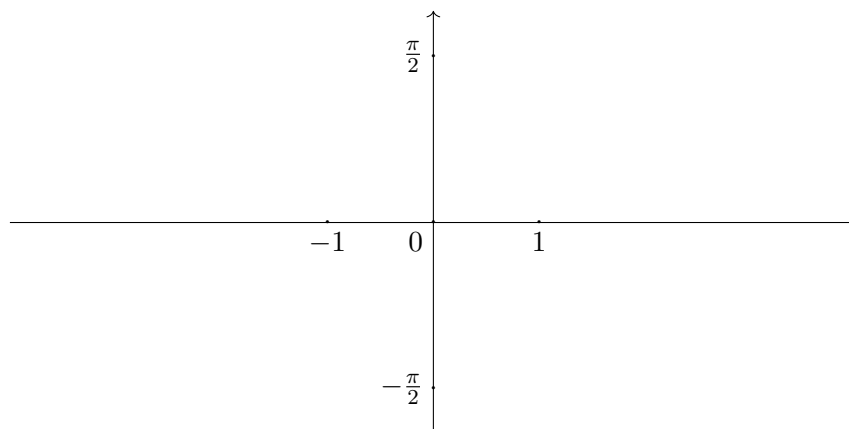
$$\text{Arcsin}(\sqrt{3}) =$$

- On a donc :

On n'a pas $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ pour tout x mais :

- La courbe de Arctan s'obtient à partir de l'arc de courbe de $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, par symétrie par rapport à la première bissectrice :





Proposition :

La fonction Arctan est

Théorème :

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Arctan}'(x) =$$

Démonstration 10

Proposition : Résultat très classique à savoir impérativement redémontrer

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} &= \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} &= \end{aligned}$$

Démonstration 11

Plan du cours

1	Fonctions hyperboliques ch et sh	1
2	Rappels et compléments : bijectivité et dérivabilité	2
3	Fonctions trigonométriques réciproques	4
3.a	Arcsin	4
3.b	Arccos	6
3.c	Arctan	7