

Chapitre 4. Complexes.

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.a Définition des nombres complexes, forme algébrique

Théorème-définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, muni de lois $+$ et $\times$, vérifiant les propriétés suivantes :

- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i , tel que $i^2 = -1$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des réels.

Autrement dit :

C'est ce qu'on appelle l'écriture algébrique du nombre complexe z .

Le réel x s'appelle la partie réelle de z , on la note $\text{Re}(z)$.

Le réel y s'appelle la partie imaginaire de z , on la note $\text{Im}(z)$.

On a donc $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$.

- Les lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$ prolongent celles de $\mathbb{R}$, et ont les mêmes propriétés :
 - *Commutativité de $+$ et de $\times$* :
 $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z$ et $z \times z' = z' \times z$.
 - *Associativité de $+$ et de $\times$* :
 $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ et $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$.
 - *Éléments neutres* :
 $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$ et $z \times 1 = 1 \times z = z$.
 - *Distributivité de $\times$ par rapport à $+$* :
 $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$ et $(z' + z'') \times z = z' \times z + z'' \times z$.
 - *Intégrité* :
 $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, zz' = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z' = 0$.

On peut donc écrire :

$$\mathbb{C} =$$

 Malgré son nom, la partie imaginaire est un réel !

Vocabulaire :

- Lorsque $\text{Re}(z) = 0$, on dit que z est imaginaire pur.
 Cela revient à dire qu'il est de la forme iy avec y réel. Exemples : $i, -i, 2i, \sqrt{2}i, \dots$
 L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$. Ainsi :

$$z \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(z) = 0.$$

- De façon similaire :

$$z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z) = 0.$$

Conséquence de l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe

Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si z et z' ont même partie réelle et même partie imaginaire :

autrement dit, pour x, x', y et y' réels :

L'idée à retenir : une égalité de nombres complexes se traduit par deux égalités de nombres réels.

$$\text{En particulier, } z = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases}.$$

1.b Addition, produit, inverse

Pour x, y, x', y' réels :

- Somme : $(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y')$, autrement dit : $\begin{cases} \operatorname{Re}(z+z') = \\ \operatorname{Im}(z+z') = \end{cases}$
Cela se généralise à des sommes de n termes :

- Produit : $(x+iy) \times (x'+iy') =$
 $=$

⚠ $\operatorname{Re}(zz')$ n'est donc pas égal à $\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$... Idem avec la partie imaginaire.
Cependant :

- Inverse : si $z = x+iy$ est non nul, alors $x^2+y^2 \neq 0$ car

$$\text{et on constate que : } (x+iy)\frac{(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x^2-(iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

$$\text{Ainsi, } z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

On pourra retenir que, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

On calcule $\frac{1}{x+iy}$ sous forme algébrique en multipliant au numérateur et au dénominateur par $(x-iy)$ (cela donnera, au dénominateur, x^2+y^2 puisque c'est le résultat de $(x+iy)(x-iy)$).
--

Cas des puissances de i :

$$\frac{1}{i} =$$

$$i^3 = \quad i^4 = \quad i^5 =$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : i^{2n} = \quad i^{2n+1} =$$

1.c Interprétation géométrique

Définition :

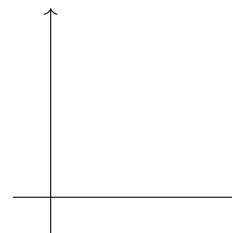
Le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ s'écrivant $z = x + iy$, avec x et y réels.

- Le point M de coordonnées (x, y) est appelé point d'affixe z , ce que l'on note : $M(z)$.

On dit aussi que M est le point image de z .

- Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) est appelé vecteur d'affixe z , ce que l'on note : $\vec{u}(z)$.



On peut donc identifier $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ (muni d'un repère orthonormé direct).

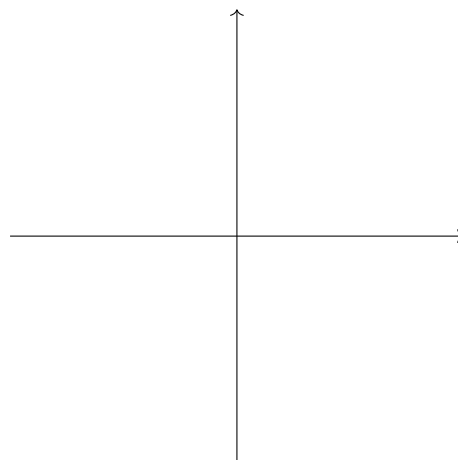
Exemples :

Plus généralement, les points M d'affixe z réelle sont les points de l'axe des abscisses :

$$z \in \mathbb{R} \iff M(z) \in (Ox)$$

les points M d'affixe z imaginaire pur sont les points de l'axe des ordonnées :

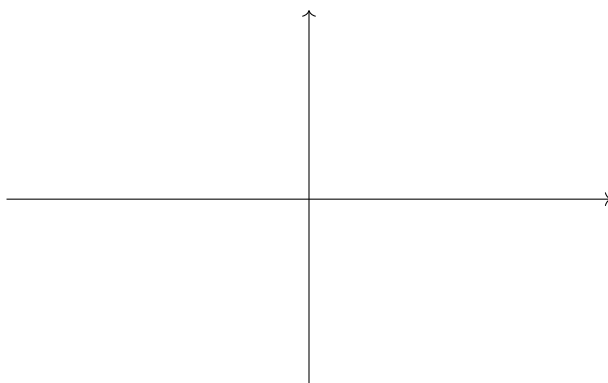
$$z \in i\mathbb{R} \iff M(z) \in (Oy)$$



Proposition :

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs, d'affixes respectives z et z' . Soit λ un réel. Alors l'affixe de $\vec{u} + \vec{u}'$ est $z + z'$ et l'affixe de $\lambda \cdot \vec{u}$ est $\lambda \cdot z$.
- Soient A et B des points du plan, d'affixes respectives z_A et z_B . Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

Remarque : Soit M le point d'affixe z . Le point M' d'affixe $-z$ est



2 Conjugué et module

2.a Conjugué

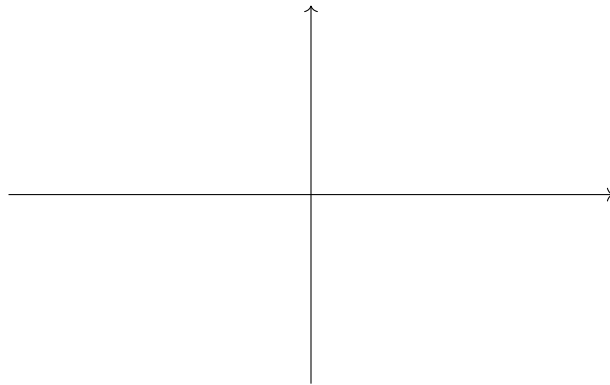
Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$, s'écrivant $z = x + iy$ avec x et y réels.

On appelle conjugué de z le complexe suivant :

Autrement dit, $\bar{z} =$

Interprétation géométrique : Si M est le point d'affixe z , alors le point M' d'affixe $\bar{z}$ est



Proposition :

Pour tous complexes z et z' :

- $\overline{z + z'} =$
- $\overline{zz'} =$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} =$
(On peut prendre $n \in \mathbb{Z}$ si $z \neq 0$)
- $\overline{\bar{z}} =$
(On dit que la conjugaison est une involution).



Démonstration 1

Proposition :

Pour tout complexe z , $\operatorname{Re}(z) =$

$\operatorname{Im}(z) =$



Démonstration 2

C'est à utiliser aussi "dans l'autre sens", c'est-à-dire :

Corollaire :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{R} \iff \text{et } z \in i\mathbb{R} \iff$$

2.b Module**Définition :**

Soit $z \in \mathbb{C}$, s'écrivant $z = x + iy$ avec x et y réels.

On appelle module de z le réel positif suivant :

$$|z| =$$

On a aussi :

$$|z| =$$

En effet,

Très souvent, c'est $|z|^2$ qu'on manipule ;

Remarques importantes

- Le module et le conjugué permettent de calculer l'inverse :

On retrouve bien la formule donnée pour $z = x + iy$ avec x, y réels :

- Si $z = x + iy$, avec x, y réels, est un réel, alors $y = 0$, $z = x$, et $|z| = \sqrt{x^2}$: on retrouve la valeur absolue de x .

Autrement dit, le module coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la valeur absolue, donc la notation $|\cdot|$ n'est pas ambiguë.

Interprétation géométrique : (toujours dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct)

Si M est le point d'affixe z , alors $|z|$ est

Si $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe z , alors $|z|$ est

Si les points A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B ,
alors $|z_B - z_A|$ est

Par conséquent : pour r réel positif et z_A un nombre complexe, en notant A le point d'affixe z_A ,

$\{M(z) \in \mathcal{P} / |z - z_A| = r\}$ est

$\{M(z) \in \mathcal{P} / |z - z_A| \leq r\}$ est

$\{M(z) \in \mathcal{P} / |z - z_A| < r\}$ est

Proposition :

Pour tous complexes z et z' :

- $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|zz'| =$
- Si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| =$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| =$
(On peut prendre $n \in \mathbb{Z}$ si $z \neq 0$)
- $|z| = 1 \iff \bar{z} =$



Démonstration 3

Proposition :

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- **(Inégalité triangulaire)** Pour tous complexes z et z' :

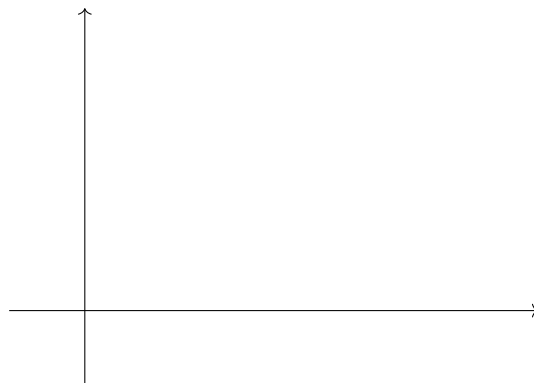
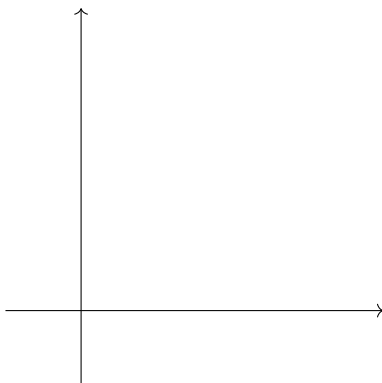
Pour l'inégalité de droite, on a égalité si et seulement si z et z' sont positivement liés, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, z' = \alpha z \text{ ou } \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, z = \alpha z'.$$



Démonstration 4

Interprétations géométriques :



3 Nombres complexes de module 1

3.a Ensemble des nombres complexes de module 1

Définition :

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} =$$

Remarque importante : Comme $|z|$ est un réel positif, $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1$.

Premiers exemples :

Proposition :

- Pour tous éléments z et z' de $\mathbb{U}$, les éléments suivants sont encore dans $\mathbb{U}$:
- Pour tout $z \in \mathbb{U}$,



Démonstration 5

Interprétation géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y sont donc des réels).

Soit M le point d'affixe z .

$$z \in \mathbb{U} \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1.

On sait aussi qu'un point M du cercle trigonométrique est déterminé par ses coordonnées $\cos \theta$ et $\sin \theta$ où θ est l'angle orienté entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$, d'où :

Proposition :

Soit M un point du plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

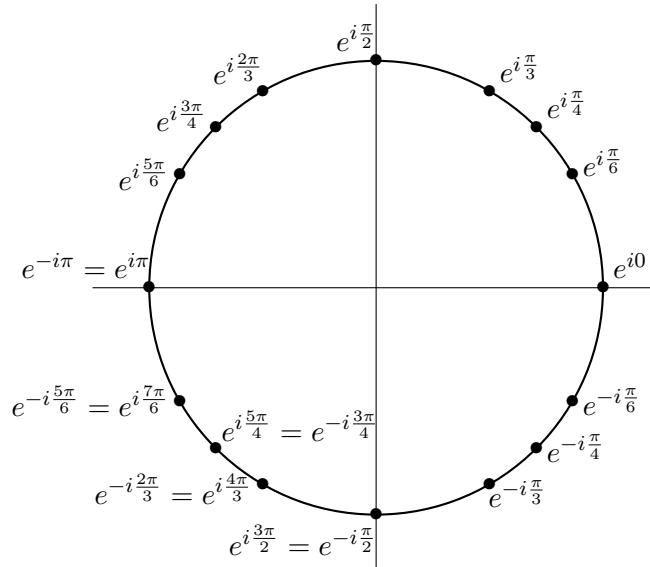
Notons (x, y) ses coordonnées.

$$M \in \mathcal{C} \iff \iff$$

Conséquence : **Théorème-définition** :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z \in \mathbb{U} \iff$$



Proposition :

- $e^{i0} = 1$ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$ $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.
- $\forall k \in \mathbb{Z}, e^{i2k\pi} = 1$
- Pour tous réels θ et θ' , $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff$
 $\iff$
- Pour tout réel θ , $\overline{e^{i\theta}} =$
- Pour tous réels θ et θ' , $e^{i(\theta+\theta')} =$
- Formules d'Euler : $\cos \theta =$ $\sin \theta =$
- Formule de Moivre :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R},$$



Démonstration 6

Exemple important : On définit le nombre $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$\bar{j} =$$

$$j^2 =$$

3.b Une application : linéarisation, "délinéarisation"

- **Linéarisation**

Linéariser une expression polynômiale en $\sin x$ et $\cos x$ (avec des puissances, des produits et éventuellement des sommes) consiste à la transformer en somme de termes $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\sin x$, ... sans puissances et sans produits. Cela sera extrêmement utile pour calculer des intégrales.

Il y a trois étapes :

- Étape 1 :
- Étape 2 :
- Étape 3 :

Exemples : a) Linéariser $\cos^4 x$.

b) Linéariser $\sin^2 x \cos x$.



Démonstration 7

- **"Dé-linéarisation"** On souhaite faire l'opération inverse : passer de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ à une expression polynômiale ne contenant plus que des $\sin(x)$ et des $\cos(x)$.

Pour les petites valeurs de n ($n = 2, 3, \dots$), les formules trigo peuvent suffire.

Sinon, il y a aussi une méthode générale, avec deux choses à connaître : la formule du binôme de Newton encore, et

$$\text{La formule de Moivre : } \cos(nx) + i \sin(nx) = (\cos(x) + i \sin(x))^n$$

Exemple : Exprimer $\cos(6x)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.

Exprimer $\sin(6x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Écrire $\sin(6x) = \sin(x) \times f(\cos(x))$ où f est une fonction polynomiale.



Démonstration 8

3.c Technique de l'angle moitié

Calcul à savoir faire parfaitement : pour tout réels p et q ,

$$e^{ip} + e^{iq} =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$e^{ip} - e^{iq} =$$

$$=$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$1 + e^{i\theta} =$$

$$=$$

$$1 - e^{i\theta} =$$

$$=$$

$$=$$

Remarque : Avec les formules obtenues pour $e^{ip} + e^{iq}$ et $e^{ip} - e^{iq}$, on peut retrouver les formules trigonométriques $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$!

3.d Une autre application : calculs de sommes

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.



Démonstration 9

4 Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

4.a Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Alors :

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Il existe un réel θ , unique à 2π près, tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Un tel réel θ est appelé un argument de z , ce qu'on note $\theta = \arg(z)$.

L'ensemble des arguments de z est alors $\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

L'écriture $\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$ est appelée forme trigonométrique de z .

Remarque : pour $z \neq 0$, il y a cependant un unique argument dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$: on l'appelle l'argument principal.

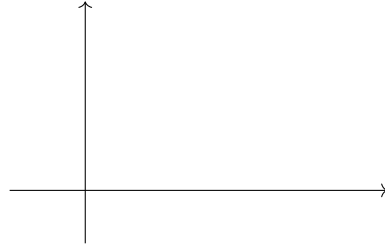
Interprétation géométrique

Soit M le point du plan d'affixe $z = |z|e^{i\theta} \neq 0$.

$|z|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$

θ est l'angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$

$(|z|, \theta)$ forment un couple de coordonnées polaires de $M(z)$.



Méthode

Lorsqu'on a mis un nombre complexe non nul z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors il s'agit bien de la forme trigonométrique de z : $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta[2\pi]$.

En effet :

4.b Propriétés

Proposition :

Soient z et z' des complexes non nuls. $z = z' \iff$



Démonstration 10

Proposition :

Soient z et z' des complexes non nuls. Alors :

$\arg(zz') =$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) =$



Démonstration 11

On a aussi : $\arg(\bar{z}) = \arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)[2\pi]$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n \arg(z)[2\pi]$.

Proposition :

Soit z un complexe non nul.

$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) =$

$z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) =$

4.c Comment obtenir la forme trigonométrique d'un complexe non nul ?

- Si $z = a \in \mathbb{R}^*$:

Retenir que transformer -1 (un signe "moins") en $e^{i\pi}$ peut être très utile...

Et de même, il faut penser parfois à remplacer i par $e^{i\frac{\pi}{2}}$...

- Autres exemples :

$$z_1 = \sqrt{2}i \quad ; \quad z_2 = -3i \quad ; \quad z_3 = ae^{i\theta} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \quad ; \quad z_4 = 2 - 2i \quad ; \quad z_5 = \frac{-3}{1 + \sqrt{3}i}$$



Démonstration 12

- A-t-on une formule générale pour récupérer la forme trigonométrique $z = |z|e^{i\theta}$ à partir de la forme algébrique $z = x + iy$ de $z \neq 0$?

4.d Une application

Proposition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a, b) \neq (0, 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a \cos(t) + b \sin(t) \\ \iff & \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \varphi \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = A \cos(t - \varphi) \end{aligned}$$



Démonstration 13

5 Des équations à savoir résoudre dans $\mathbb{C}$

5.a $z^2 = Z_0$: Racines carrées

Définition :

Soit $Z_0 \in \mathbb{C}$. On dit qu'un complexe z est une racine carrée de Z_0 si $z^2 = Z_0$.

⚠ La notation $\sqrt{x}$ n'a de sens que pour $x \in \mathbb{R}_+$! Cela désigne l'unique réel positif y vérifiant $y^2 = x$. En effet, $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie comme la réciproque de :

$$x \mapsto x^2$$

Trouver les racines carrées de Z_0 , c'est donc résoudre l'équation $z^2 = Z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Proposition :

Tout complexe Z_0 non nul possède deux racines carrées exactement, opposées l'une de l'autre.



Démonstration 14

Exemples :

-1 a pour racines carrées

-4 a pour racines carrées

2 a pour racines carrées

Généralisons : pour un réel α , les racines carrées de α sont :

La démonstration nous donne une **méthode trigonométrique** pour trouver les racines carrées : si la forme trigonométrique de Z_0 est $\rho e^{i\theta}$, alors les deux racines carrées de Z_0 sont $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Exemple : $Z_0 = 1 + i$

Que faire quand la forme trigonométrique de Z_0 n'est pas facile à obtenir, et qu'on ne dispose que de sa forme algébrique ?

On écrit $Z_0 = a + ib$ avec a, b réels.

On cherche z racine carrée de Z_0 sous la forme $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

Premier essai :

$$z^2 = Z_0 \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

Avec seulement cela, c'est compliqué de trouver x et y ! Il nous faudrait :

- une autre équation avec x^2 et y^2 , de sorte qu'on trouve les valeurs de x^2 et y^2 ;
- les signes relatifs de x et y , autrement dit le signe de xy .

Deuxième essai - la **méthode algébrique** :

L'astuce :

$$z^2 = Z_0 \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

Exemple : déterminer les racines carrées de $4 - 3i$.



Démonstration 15

5.b $az^2 + bz + c = 0$: Trinômes du second degré à coefficients complexes

Proposition :

Soit (E) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante : $az^2 + bz + c = 0$,

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ .

L'ensemble des solutions de (E) est :

En particulier, il n'y a qu'une seule solution si et seulement si



Démonstration 16

Exemple : $(E) : z^2 + (1 - i)z - 1 + \frac{i}{4} = 0$

- Cas où a, b, c sont réels

On retrouve les résultats connus car $\Delta = b^2 - 4ac$ est alors un réel ;

— Si $\Delta \geq 0$,

— Si $\Delta < 0$,

- Remarque importante dans le cas où a, b, c sont réels et $\Delta < 0$

Comme $\sqrt{-\Delta} \neq 0$, on a des solutions complexes non réelles.

Soit z_0 l'une des deux solutions.

On peut l'écrire sous forme trigonométrique (car $z_0 \neq 0$ sinon z_0 serait réelle) :

$$z_0 = \rho e^{i\theta} \text{ avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{L'autre solution est } \overline{z_0} = \rho e^{-i\theta} \text{ donc } az^2 + bz + c &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Il s'agit de la forme générale d'un trinôme du second degré :

— à coefficients réels

— sans racine réelle (i.e. $\Delta < 0$)

Sans calcul, on peut dire que les racines sont

Remarque : si on a un polynôme $P(z)$ à coefficients complexes de degré strictement supérieur à 2, on cherche une racine "évidente" α , et on peut mettre $(z - \alpha)$ en facteur dans $P(z)$ (comme au chapitre 1).

- Relations coefficients-racines

Proposition :

Soit $(E) : az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$)

z_1 et z_2 sont les deux solutions de $(E) \iff$



Démonstration 17

Bien sûr, il est très courant d'avoir $a = 1$: équation de la forme $z^2 + pz + q = 0$.

z_1 et z_2 sont les deux solutions de $(E) \iff$

Le coefficient de z est alors

Le coefficient constant est alors

5.c $z^n = Z$: Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z_0 \in \mathbb{C}$.

On dit qu'un complexe z est une racine n ième de Z_0 si

Lorsque $Z_0 = 1$, on parle de racine n ième de l'unité.

⚠ Ne pas utiliser la notation $\sqrt[n]{x}$ à mauvais escient : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie comme la réciproque de $x \mapsto x^n$, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ si n est pair et de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si n est impair.

Ainsi, $\sqrt[n]{x}$ n'a de sens que si $x \in \mathbb{R}$ voire seulement si $x \in \mathbb{R}_+$; et cela ne désigne qu'une seule des racines n -ièmes de x au sens complexe !

L'ensemble des racines n èmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$:

$$\mathbb{U}_n =$$

Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n èmes de l'unité, qui sont les complexes suivants :



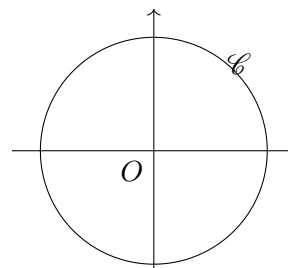
Démonstration 18

Ainsi

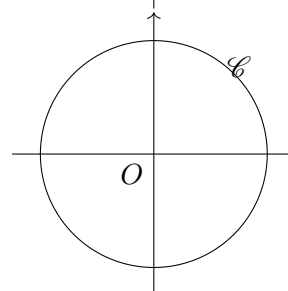
$$\mathbb{U}_n =$$

Pour les petites valeurs de n , voici les racines n èmes de l'unité et leurs points images sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$:

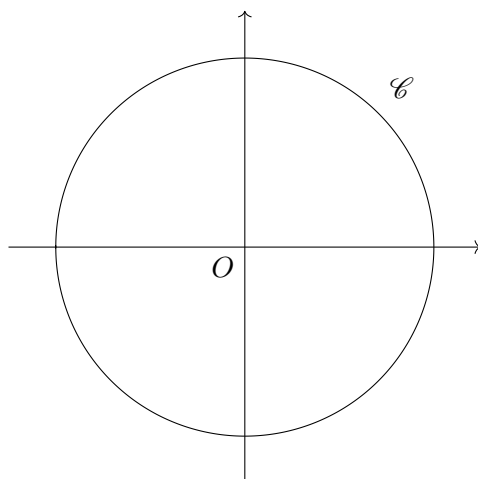
$n = 2$:



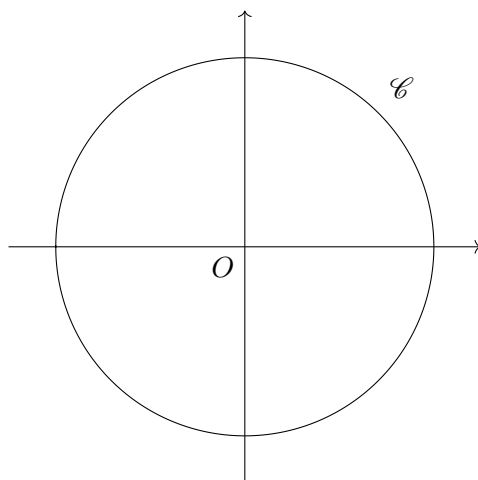
$n = 3$:



$n = 4$:



Les points images forment, sur le cercle trigonométrique,



Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ est alors la somme des racines n èmes de l'unité, elle vaut 0 :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0.$$



Démonstration 19

En particulier :

Il faut savoir manipuler les puissances des racines n -èmes de l'unité. Par exemple, : si α est une racine 5-ième de l'unité :

$$\begin{array}{lll} \alpha^5 = & \alpha^6 = & \alpha^8 = \\ \alpha^{2026} = & & \overline{\alpha} = \end{array}$$

Exemple d'application des racines n èmes : Résoudre $(z + 1)^4 = z^4$.



Démonstration 20

Racines n èmes de Z_0 non nul :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z_0 \in \mathbb{C}^*$.

- On écrit Z_0 sous forme trigonométrique :

$$Z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}, \quad \rho_0 > 0.$$

Remarque : on en tire une racine n ème évidente :

- On résout, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n = Z_0 \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

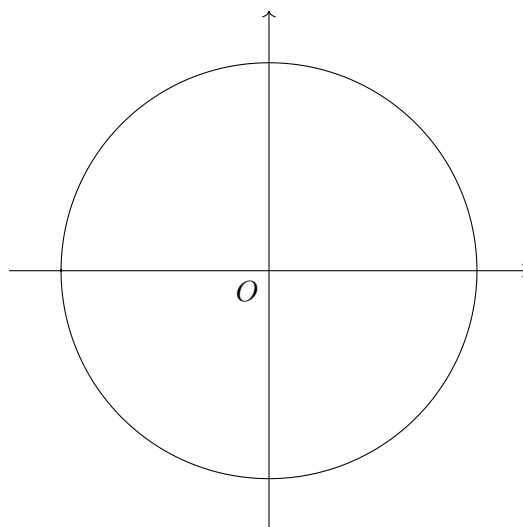
$$\iff$$

$$\iff$$

On a montré qu'il existait exactement n racines n èmes de Z_0 , qui sont les complexes suivants :

$\sqrt[n]{\rho_0} e^{i\frac{\theta_0}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, k variant de 0 à $n-1$, avec $\rho_0 = |Z_0|$ et θ_0 un argument de Z_0 .

On retrouvera ce résultat à chaque fois en appliquant la méthode ci-dessus !



Exemple : Trouver les racines 5èmes de $1 + i$.



Démonstration 21

6 Exponentielle complexe

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y réels).

On définit

$$e^z = e^x e^{iy}$$

C'est un nombre complexe non nul.

Il est écrit directement sous forme trigonométrique :

e^x est un réel strictement positif, e^{iy} est un nombre complexe de module 1.

En résumé :

Proposition :

Soient z et z' des complexes.

- $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^z)^n = e^{nz}$.
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.
- $e^z = e^{z'} \iff$



Démonstration 22

Exemple : Résoudre $e^z = \sqrt{3} + i$.



Démonstration 23

7 Applications à la géométrie

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

7.a Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité

Proposition :

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs non nuls, d'affixes respectives z et z' . Alors :

$$(\vec{u}, \vec{u}') =$$

- Soient A, B, C, D des points d'affixes respectives a, b, c, d , avec $A \neq B$ et $C \neq D$.
Alors :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) =$$



Démonstration 24

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{u}'$ ou bien tel que $\vec{u}' = k\vec{u}$.

Proposition :

(Colinéarité et orthogonalité)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs non nuls, d'affixes respectives z et z'

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}$.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}$.



Démonstration 25

En fait, cela marque aussi si $z' = 0$.

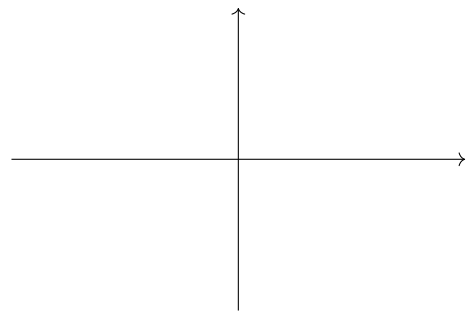
Soient A, B, C des points d'affixes respectives a, b, c . Dire qu'ils sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple) sont colinéaires. On en tire que, si $a \neq b$:

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

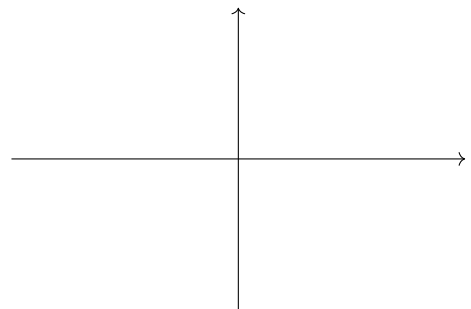
7.b Quelques transformations élémentaires du plan

On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$, autrement dit on identifie z et le point M d'affixe z .

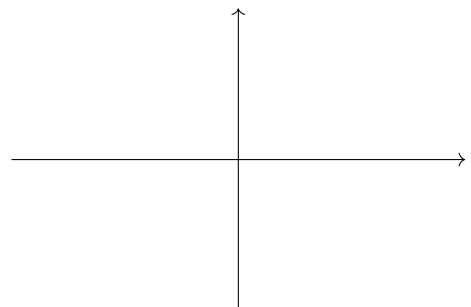
- La transformation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est
 $z \mapsto -z$



- La transformation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est
 $z \mapsto \bar{z}$

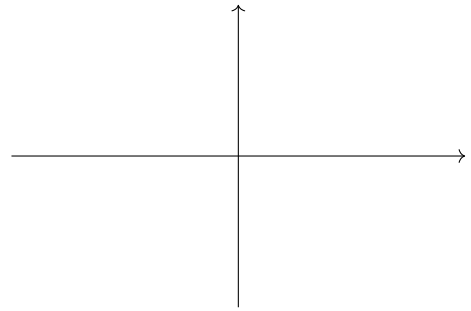


- Soit $b \in \mathbb{C}$. La transformation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est
 $z \mapsto z + b$



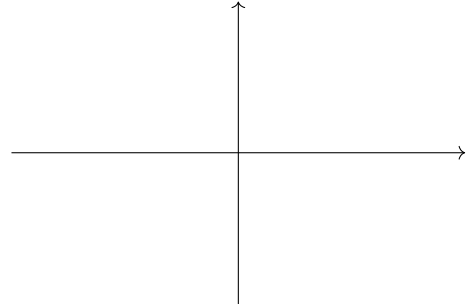
- Soit $k \in \mathbb{R}^*$. La transformation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est

$$z \mapsto kz$$



- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La transformation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est

$$z \mapsto e^{i\theta}z$$



De façon plus générale, si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on peut s'intéresser à l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. En écrivant α

$$z \mapsto \alpha z$$

sous forme trigonométrique $\rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on peut noter :

- h l'homothétie de centre O et de rapport ρ
- r la rotation de centre O et d'angle θ .

On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

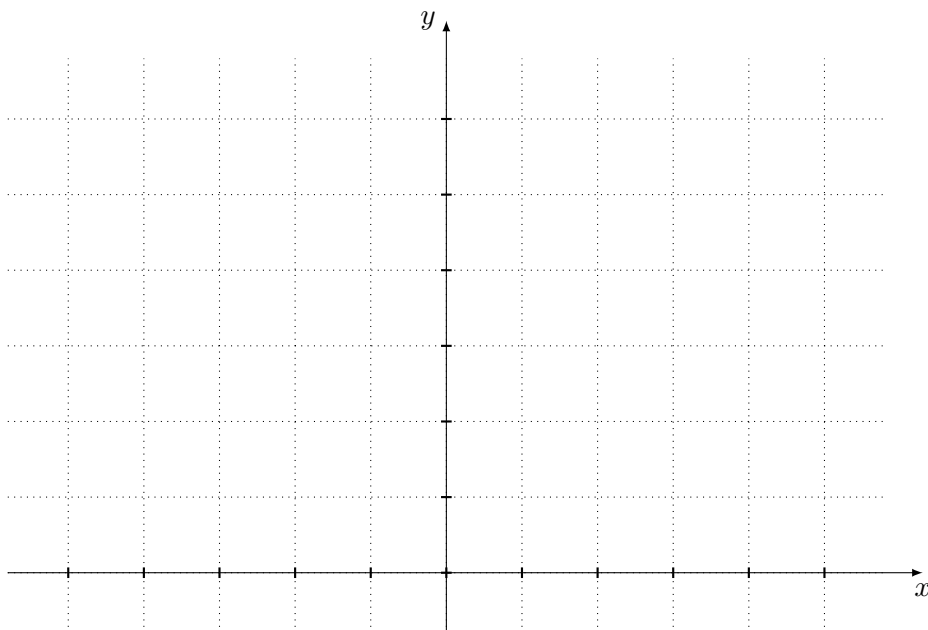
$$\begin{aligned} f(z) &= \rho \times e^{i\theta} \times z = h \circ r(z) \\ &= e^{i\theta} \times \rho \times z = r \circ h(z) \end{aligned}$$

f est appelée similitude de centre O , de rapport ρ et d'angle θ .

Exemple

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Construire géométriquement $f(2+i)$. Vérifier par le calcul.

$$z \mapsto 3iz$$



8 Fonctions à valeurs complexes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On peut définir des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, par exemple :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \ln(x) + ix^2. \end{aligned}$$

On peut alors considérer les parties réelles et imaginaires de $f(x)$ pour tout $x \in I$, ce qui définit des fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ qui, elles, sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans l'exemple précédent, $\operatorname{Re}(f): \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(f): \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x)$ $x \mapsto x^2$.

Définition :

- On dit que f est continue en x_0 (respectivement sur I) si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.
- On dit que f est dérivable en x_0 (respectivement sur I) si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

Dans ce cas, on définit le nombre dérivé $f'(x_0)$ (respectivement la fonction dérivée f') comme :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= (\operatorname{Re}(f))'(x_0) + i (\operatorname{Im}(f))'(x_0) \\ &\text{(respectivement } f' = (\operatorname{Re}(f))' + i (\operatorname{Im}(f))' \text{)} \end{aligned}$$

- Lorsque f est continue sur I , on définit, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

Remarques :

- La définition de f' permet d'écrire, en cas de dérivabilité : $\begin{cases} \operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re}(f))' \\ \operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im}(f))' \end{cases}$
- Une somme, plus généralement une combinaison linéaire, un produit, un quotient de fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont dérivables, et les formules habituelles sont valables.

Exemples :

- Avec la fonction f définie plus haut :
- Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, la dérivée de $x \mapsto \alpha x$ est $x \mapsto \alpha$.



Démonstration 26

- Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; calculons $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$.
 $x \mapsto e^{ix}$

Proposition :

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I . On pose, pour tout $x \in I$, $f(x) = e^{\varphi(x)}$.

On note : $f =$

Alors, f est dérivable sur I et : $\forall x \in I$, $f'(x) =$

Ce qui se note : $(e^\varphi)' =$

**Démonstration 27**

Exemple : Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ où α est un complexe,

$$x \mapsto e^{\alpha x}$$

f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$.

Plan du cours

1	L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes	1
1.a	Définition des nombres complexes, forme algébrique	1
1.b	Addition, produit, inverse	2
1.c	Interprétation géométrique	3
2	Conjugué et module	4
2.a	Conjugué	4
2.b	Module	5
3	Nombres complexes de module 1	7
3.a	Ensemble des nombres complexes de module 1	7
3.b	Une application : linéarisation, "délinéarisation"	9
3.c	Technique de l'angle moitié	9
3.d	Une autre application : calculs de sommes	10
4	Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul	10
4.a	Définition	10
4.b	Propriétés	11
4.c	Comment obtenir la forme trigonométrique d'un complexe non nul ?	11
4.d	Une application	12
5	Des équations à savoir résoudre dans $\mathbb{C}$	12
5.a	$z^2 = Z_0$: Racines carrées	12
5.b	$az^2 + bz + c = 0$: Trinômes du second degré à coefficients complexes	14
5.c	$z^n = Z$: Racines n -ièmes d'un nombre complexe	16
6	Exponentielle complexe	19
7	Applications à la géométrie	19
7.a	Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité	19
7.b	Quelques transformations élémentaires du plan	20
8	Fonctions à valeurs complexes	22