

Devoir maison 1.

À rendre le jeudi 10 septembre 2025

Exercice

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_k sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_k : x \mapsto \frac{(2 \ln(x))^k}{x^2}.$$

On notera $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k .

1°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Rappeler la valeur de $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^k}{e^X}$. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$.

Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x)$? (On distinguera deux cas selon la parité de k).

2°) a) Établir le tableau de variations de f_1 .

b) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 1.

3°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ supérieur ou égal à 2.

a) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g_k(x) = (\ln(x))^{k-1} (k - 2 \ln(x))$.

Déterminer le signe de $g_k(x)$ en fonction de x , en distinguant deux cas selon la parité de k .

b) Justifier que f_k est dérivable et que $f'_k(x)$ a le signe de $g_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

En déduire le tableau de variations de f_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en distinguant deux cas selon la parité de k .

4°) Justifier qu'il existe exactement deux points communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On précisera ces deux points.

5°) On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_k = \frac{1}{2^k} \int_1^e f_k(x) \, dx = \int_1^e \frac{(\ln(x))^k}{x^2} \, dx.$$

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{k+1} = -\frac{1}{e} + (k+1)I_k$$

c) Montrer, par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{I_k}{k!} = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right)$$

d) En utilisant un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1, e]$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_k \leq 1$.

e) En déduire la valeur de $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{I_k}{k!}$ puis la valeur de $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right)$.