

Corrigé du devoir maison 1.

1°) Par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^k} = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^k}{e^X} = 0}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_k(x) = \frac{(\ln(x^2))^k}{e^{\ln(x^2)}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^k}{e^X} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x^2))^k}{e^{\ln(x^2)}}$ = 0. Ainsi, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0}$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x))^k = +\infty$ si k est pair et $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x))^k = -\infty$ sinon.

Par produit, on a donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = -\infty \text{ si } k \text{ est pair}}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = -\infty \text{ si } k \text{ est impair}}$.

2°) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_1(x) = 2 \frac{\ln(x)}{x^2}$.

Par quotient de fonctions dérivables, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_1'(x) = 2 \frac{\frac{1}{x} x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = 2x \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^4} = 2 \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^3 > 0$ donc $f_1'(x)$ est du signe de $1 - 2 \ln(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$1 - 2 \ln(x) > 0 \iff 1 > 2 \ln(x)$$

$$\iff \frac{1}{2} > \ln(x)$$

$$\iff e^{\frac{1}{2}} > x \text{ par stricte croissance de exp}$$

$$\text{De même, } 1 - 2 \ln(x) = 0 \iff x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Calculons : } f_1(e^{\frac{1}{2}}) = 2 \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{(e^{\frac{1}{2}})^2} = 2 \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{e}.$$

D'où le tableau de variation de f_1 :

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f_1'(x)$		+	-
f_1	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

b) $f_1'(1) = 2 \frac{1-0}{1^3} = 2$, et $f_1(1) = 0$, donc la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = 2(x-1) + 0$ i.e. $\boxed{y = 2x - 2}$.

c) Voir le tracé de la courbe à la questions 3c.

3°) a) Lorsque k est impair, $k - 1$ est pair, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x))^{k-1} \geq 0$, et cette quantité s'annule uniquement lorsque $\ln(x)$ s'annule i.e. lorsque $x = 1$.

Lorsque k est pair, $k - 1$ est impair, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x))^{k-1}$ a même signe que $\ln(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$k - 2\ln(x) > 0 \iff k > 2\ln(x)$$

$$\iff \frac{k}{2} > \ln(x)$$

$$\iff e^{\frac{k}{2}} > x \text{ par stricte croissance de exp}$$

$$\text{De même, } k - 2\ln(x) = 0 \iff x = e^{\frac{k}{2}}$$

On en tire les tableaux de signes suivants :

Pour k impair :

x	0	1	$e^{\frac{k}{2}}$	$+\infty$		
$g_k(x)$		+	0	+	0	−

Pour k pair :

x	0	1	$e^{\frac{k}{2}}$	$+\infty$
$(\ln(x))^{k-1}$	−	0	+	+
$k - 2 \ln(x)$	+		+	0 −
$g_k(x)$	−	0	+	0 −

b) Par produit et quotient, $f_k : x \mapsto 2^k \frac{(\ln(x))^k}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'_k(x) = 2^k \frac{k \frac{1}{x} (\ln(x))^{k-1} x^2 - (\ln(x))^k \cdot 2x}{(x^2)^2} = 2^k x \frac{k (\ln(x))^{k-1} - 2 (\ln(x))^k}{x^4} = 2^k \frac{g_k(x)}{x^3}$$

Comme $x^3 > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, g_k et f'_k ont même signe.

$$\text{Calculons : } f_k\left(e^{\frac{k}{2}}\right) = 2^k \frac{\left(\ln\left(e^{\frac{k}{2}}\right)\right)^k}{\left(e^{\frac{k}{2}}\right)^2} = 2^k \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^k}{e^k} = \frac{k^k}{e^k} \text{ et } f_k(1) = 0.$$

On en déduit le tableau de variation de f_k .

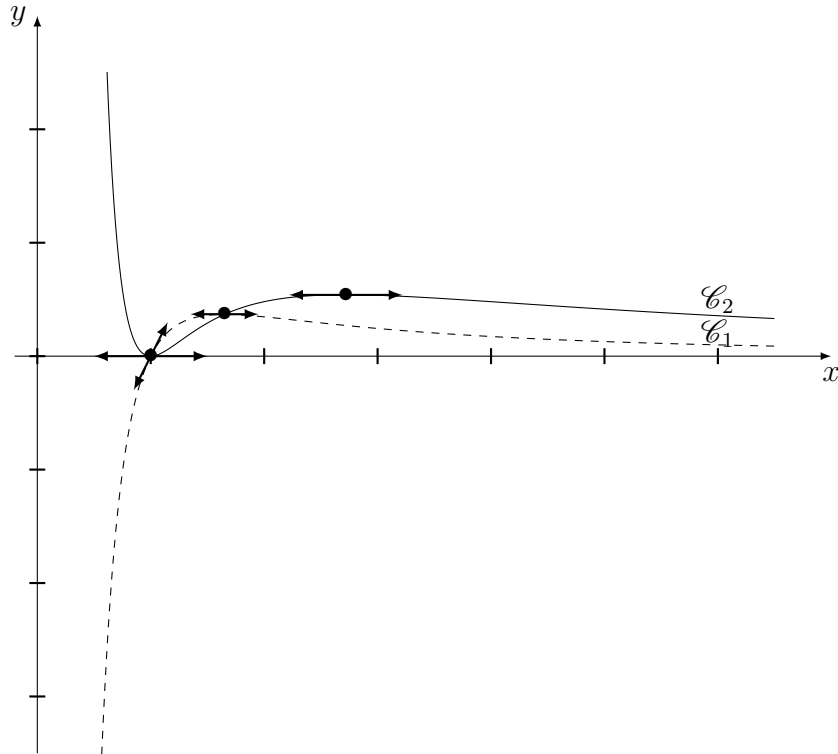
Pour k impair :

x	0	1	$e^{\frac{k}{2}}$	$+\infty$	
$f'_k(x)$	+ 0 + 0 −				
$f_k(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $\frac{k^k}{e^k}$ $\searrow$ 0				

Pour k pair :

x	0	1	$e^{\frac{k}{2}}$	$+\infty$		
$f'_k(x)$		-	0	+	0	-
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$ $\frac{k^k}{e^k}$ $\searrow$ 0				

c) Tracé des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$:



$$\text{Remarque : } f_2\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(2 \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\left(2 \frac{1}{2}\right)^2}{e} = \frac{1}{e}.$$

4°) On peut commencer par chercher les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

On résout, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\iff 2 \ln(x) = 4 (\ln(x))^2 \\ &\iff \ln(x) - 2 (\ln(x))^2 = 0 \\ &\iff \ln(x) (1 - 2 \ln(x)) = 0 \\ &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On en tire que les points $A(1, 0)$ et $B\left(e^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{e}\right)$ sont les seuls points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Vérifions que ces points sont sur toutes les courbes $\mathcal{C}_k$:

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, f_k(1) = 0 \text{ et } f_k\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(2 \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\right)^k}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1^k}{e} = \frac{1}{e}.$$

Ainsi il y a bien exactement deux points communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$, les points A et B .

- 5°) a) On pose, pour tout $x \in [1, e]$, $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont dérivables, et leurs dérivées sont continues : pour tout $x \in [1, e]$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = \frac{1}{x^2}$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \frac{-1}{x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + 0 + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} + -\frac{1}{e} + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

- b) On pose, pour tout $x \in [1, e]$, $w(x) = (\ln(x))^{k+1}$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$. Les fonctions w et v sont dérivables, et leurs dérivées sont continues : pour tout $x \in [1, e]$, $w'(x) = (k+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^k$, $v'(x) = \frac{1}{x^2}$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \left[-\frac{1}{x} (\ln(x))^{k+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{k+1}{x} (\ln(x))^k \frac{-1}{x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + 0 + (k+1) \int_1^e \frac{(\ln(x))^k}{x^2} dx \end{aligned}$$

$$\boxed{I_{k+1} = -\frac{1}{e} + (k+1)I_k}$$

- c) Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_k : \frac{I_k}{k!} = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} \right)$.

- $\frac{I_1}{1!} = I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

Et pour $k = 1$, $1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} \right) = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} \right) = 1 - \frac{2}{e}$.

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente,

$$\frac{I_{k+1}}{(k+1)!} = -\frac{1}{e} \frac{1}{(k+1)!} + \frac{(k+1)}{(k+1)!} I_k$$

Or $\frac{(k+1)}{(k+1)!} I_k = \frac{1}{k!} I_k = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} \right)$ par hypothèse de récurrence. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{I_{k+1}}{(k+1)!} &= -\frac{1}{e} \frac{1}{(k+1)!} + 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \right) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\frac{I_k}{k!} = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right)}$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\ln$ est croissante, pour tout $x \in [1, e]$, $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(e)$ i.e. $0 \leq \ln(x) \leq 1$, d'où $0 \leq (\ln(x))^k \leq 1$.

Par ailleurs, pour tout $x \in [1, e]$, $0 \leq \frac{1}{x^2}$, donc, par produit, $0 \leq \frac{(\ln(x))^k}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

Par croissance de l'intégrale sur $[1, e]$,

$$\int_1^e 0 \, dx \leq \int_1^e \frac{(\ln(x))^k}{x^2} \, dx \leq \int_1^e \frac{1}{x^2} \, dx$$

$$\text{Or } \int_1^e 0 \, dx = 0 \text{ et } \int_1^e \frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} + 1 \leq 1.$$

On a bien : $\boxed{0 \leq I_k \leq 1}$.

e) On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{I_k}{k!} \leq \frac{1}{k!}$; comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} = 0$, d'après le théorème des

gendarmes, $\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{I_k}{k!} = 0}$.

Or, d'après la question c, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} = e - e \frac{I_k}{k!}$.

Donc $\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right) = e}$.