

Devoir maison 2.

À rendre le lundi 21 septembre 2026

Exercice

1°) a)

T_a et D_b sont parallèles $\iff$ les droites T_a et D_b ont même pente

$$\iff \exp'(a) = \ln'(b)$$

$$\iff e^a = \frac{1}{b}$$

$$\iff \boxed{b = e^{-a}}$$

b) On suppose ici que $b = e^{-a}$.

Une équation de T_a est : $y = e^a + e^a(x - a) \iff y = e^a x - ae^a + e^a$

Une équation de D_b est : $y = \ln(b) + \frac{1}{b}(x - b) \iff y = e^a x - a - 1$

T_a et D_b sont déjà parallèles. De plus T_a passe par le point A de coordonnées $(0, e^a - ae^a)$.

Pour qu'elles soient confondues, il faut et il suffit que D_b passe aussi par ce point.

$$T_a \text{ et } D_b \text{ sont confondues} \iff e^a - ae^a = -a - 1$$

$$\iff e^a(a - 1) = a + 1$$

Si $a = -1$ alors l'équation est équivalente à $-\frac{2}{e} = 0$. Exclu. Donc,

$$T_a \text{ et } D_b \text{ sont confondues} \iff a \neq -1 \text{ et } e^a \frac{a - 1}{a + 1} = 1$$

$$\iff \boxed{a \neq -1 \text{ et } f(a) = 1}$$

2°) a) f est définie sur $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$.

f est dérivable sur D comme produit et quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \frac{x-1}{x+1} + e^x \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{e^x}{(x+1)^2} ((x-1)(x+1) + 2) \\ &= \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		+
f	0 	$+\infty$	$+\infty$ 
		$-\infty$	

Justification des limites :

$$\text{Au voisinage de } +\infty, f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

On a aussi par une écriture analogue, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

Les limites à gauche et à droite de -1 s'obtiennent facilement par opérations sur les limites.

b) ★ $] -1, +\infty[$ est un intervalle

★ f est continue sur $] -1, +\infty[$

★ f est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$

Donc, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle $] -1, +\infty[$ sur $] \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= \mathbb{R}$.

Comme $1 \in \mathbb{R}$, 1 admet un unique antécédent ℓ par f dans $] -1, +\infty[$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution ℓ dans $] -1, +\infty[$.

c) $f(1) = 0 < 1$ et $f(2) = \frac{e^2}{3} > 1$.

On a : $f(1) < f(\ell) < f(2)$. De plus, $1, \ell, 2$ sont des éléments de $] -1, +\infty[$, intervalle sur lequel f est croissante. Donc,

$$\boxed{1 < \ell < 2}$$

d) Soit x un réel tel que $x \neq -1$ et $x \neq 1$. Alors $f(x)$ et $f(-x)$ existent. De plus,

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-x} \frac{-x-1}{-x+1} \\ &= e^{-x} \frac{x+1}{x-1} \\ &= \frac{1}{e^x \frac{x-1}{x+1}} \quad \text{car } x+1 \neq 0 \\ &= \boxed{\frac{1}{f(x)}} \end{aligned}$$

e) Soit x un réel de $] -\infty, -1[$.

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\iff \frac{1}{f(-x)} = 1 \quad \text{par 2d puisque } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \\ &\iff f(-x) = 1 \\ &\iff -x = \ell \quad \text{car } -x > -1 \text{ et par la question 2b} \\ &\iff \boxed{x = -\ell} \end{aligned}$$

f) Cela revient à déterminer les réels a et b tels que $b > 0$ et $a \neq -1$ et

$$\begin{aligned} b = e^{-a} \text{ et } f(a) = 1 &\iff b = e^{-a} \text{ et } (a = \ell \text{ ou } a = -\ell) \\ &\iff (b = e^{-\ell} \text{ et } a = \ell) \text{ ou } (b = e^{\ell} \text{ et } a = -\ell) \end{aligned}$$

Il y a deux tangentes communes T_1 et T_2 et elles ont pour équation :

$$\boxed{D_1 : y = e^{\ell} x - 1 - \ell} \text{ et } \boxed{D_2 : y = e^{-\ell} x - 1 + \ell}.$$