

Devoir maison 3.

À rendre le lundi 12 octobre 2026

Exercice

1°) a) On peut écrire : $S = \sum_{k=1}^n \left(q^k \left(\sum_{i=1}^k 1 \right) \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k q^k \times 1 \right) = \boxed{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k q^k \right)}$.

b) Échangeons les deux sommes :

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n q^k \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^{i-1} q^k \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^i}{1-q} \right) \quad \text{car } q \neq 1 \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{q^i - q^{n+1}}{1-q} \\
 &= \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^n (q^i - q^{n+1}) \\
 &= \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^n q^i - \sum_{i=1}^n q^{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=0}^n q^i - q^0 - nq^{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{1-q} \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1 - nq^{n+1} \right) \quad \text{car } q \neq 1 \\
 &= \frac{1-q^{n+1} - 1 + q - nq^{n+1}(1-q)}{(1-q)^2} \\
 &= \boxed{\frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2}}.
 \end{aligned}$$

- 2°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons la première relation au rang $n+1$: $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1}$.
 Remplaçons b_{n+1} par son expression donnée par la deuxième relation : $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 3b_n$.
 Enfin, de la première relation au rang n on tire $b_n = a_{n+1} - a_n$, d'où :

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 3(a_{n+1} - a_n) = \boxed{4(a_{n+1} - a_n)}$$

- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $a_n = (n+2)2^n$.

• **Initialisation**

$a_0 = 2$ et $(0+2)2^0 = 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$a_1 = a_0 + b_0 = 2 + 4 = 6$ et $(1+2)2^1 = 3 \cdot 2 = 6$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité**

On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$a_n = (n+2)2^n \text{ et } a_{n+1} = (n+3)2^{n+1}.$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 4(a_{n+1} - a_n) = 4((n+3)2^{n+1} - (n+2)2^n) \\ &= 4 \times 2^n (2(n+3) - (n+2)) \\ &= 2^{n+2}(n+4). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

- **Conclusion**

On en déduit, par récurrence double, que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n = (n+2)2^n}$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $b_k = a_{k+1} - a_k$ d'après la première relation. Donc on a une somme télescopique :

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n \\ &= a_{n+1} - a_0 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{B_n = (n+3)2^{n+1} - 2}$.

3°) a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = a_{n+1} - a_n = (n+3)2^{n+1} - (n+2)2^n = 2^n(2n+6-n-2) = \boxed{(n+4)2^n}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^n (k+4)2^k \\ &= \sum_{k=0}^n k2^k + 4 \sum_{k=0}^n 2^k \\ &= \sum_{k=1}^n k2^k + 4 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \quad \text{puisque } 2 \neq 1 \\ &= \frac{2 - (n+1)2^{n+1} + n2^{n+2}}{(1-2)^2} - 4(1-2^{n+1}) \quad \text{en utilisant la question 1 avec } q=2 \neq 1 \\ &= 2 - (n+1)2^{n+1} + 2n2^{n+1} - 4 + 4 \times 2^{n+1} \\ &= \boxed{(n+3)2^{n+1} - 2} \end{aligned}$$