
Devoir surveillé 1.

Samedi 3 octobre 2025, de 7h55 à 11h55.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une **marge**.*

Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

- 1°) a) Pour tout $x > 0$, $f(x) = x \ln(x+2) - x \ln x$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+2) = \ln(2)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x+2) = 0$; et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (croissances comparées).

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Ainsi, f est continue en 0.

- b) Soit $x > 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \ln(x+2) - \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0 et la courbe de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

- c) Pour tout $h \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$, $\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$.

On reconnaît un taux d'accroissement de $\ln$; comme cette fonction est dérivable en 1 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Par ailleurs, pour $x > 0$, $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2 \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, par composition avec la limite précédemment établie, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

- 2°) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) + x \times \frac{x - (x+2)}{x^2} \times \frac{x}{x+2}$$

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - \frac{2}{x+2}$$

f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient, composée et somme de fonctions dérivables.

Ainsi, f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, et :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f''(x) &= \frac{x - (x+2)}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} \\ &= -\frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2} = 2 \frac{-x - 2 + x}{x(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$$

- b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) < 0$. Ainsi, f' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - \frac{2}{x+2} = \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) - \frac{2}{x+2}$.

Donc, par opérations, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Par stricte décroissance de f' , on en déduit que, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$.

- c) Tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+
f	0	2

3°) a) u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u'(x) = 2 \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

D'où le tableau de variations de u :

x	0	$+\infty$
$u'(x)$		+
u	0	2

Pour $x > 0$,

$$u(x) = \frac{2x}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2.$$

b) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) - u(x) &= x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - \frac{2x}{x+2} \\ \text{et } xf'(x) &= x \left(\ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - \frac{2}{x+2} \right) \\ &= x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - \frac{2x}{x+2} \end{aligned}$$

D'où $f(x) - u(x) = xf'(x)$.

Comme $xf'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, on en déduit que $f(x) > u(x)$.

Ainsi, $\mathcal{H}$ est en-dessous de $\mathcal{C}$.

Voir le tracé de la courbe à la fin de l'exercice.

Données importantes pour le tracé :

Pour le point d'abscisse 0, $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$; pour l'abscisse 2, $u(2) = 1$ et $u'(2) = \frac{1}{4}$;
et la droite d'équation $y = 2$ est asymptote en $+\infty$ puisque $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$.

c) Soit $\lambda > 0$. La tangente à $\mathcal{C}$ au point M_λ a pour équation :

$$y = f'(\lambda)(x - \lambda) + f(\lambda)$$

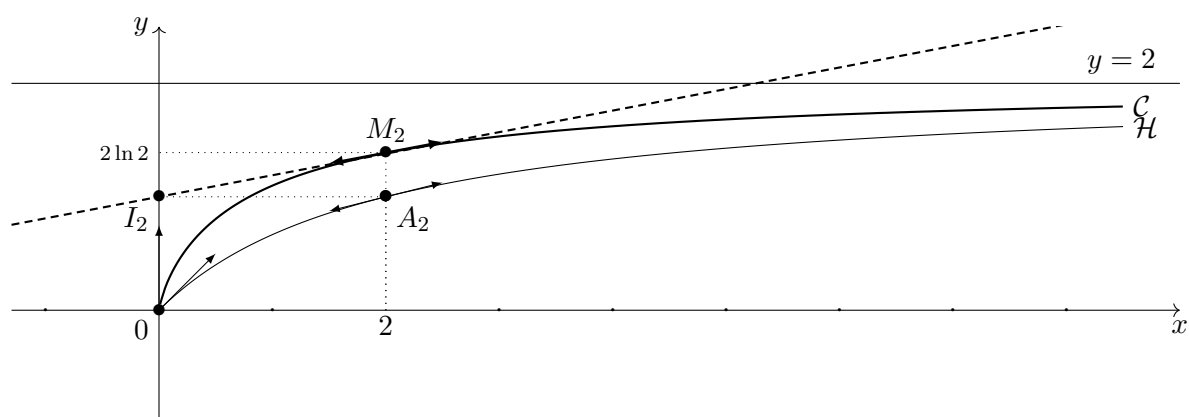
L'axe des ordonnées a pour équation $x = 0$, donc l'ordonnée du point d'intersection I_λ avec cette tangente est $f'(\lambda)(0 - \lambda) + f(\lambda)$ i.e. $f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)$. Ainsi le point d'intersection est bien le point I_λ de coordonnées $(0, u(\lambda))$.

Pour tracer la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_λ , il suffit donc de :

- Placer le point I_λ : c'est le point de l'axe (Oy) qui a même ordonnée que le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse λ .
- Relier le point M_λ et le point I_λ .

d) En 0, le taux d'accroissement de f a pour limite $+\infty$, d'où une tangente verticale au point d'abscisse 0.

$f(2) = 2 \ln(2)$, la tangente en M_2 s'obtient par la méthode expliquée en c.
 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est également asymptote horizontale à $\mathcal{H}$ en $+\infty$.



Exercice 2

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$. (I_1) est bien définie en x si et seulement si $x^2 - 2x \geq 0$.

Or $x^2 - 2x = x(x - 2)$, c'est un trinôme du second degré de racines 0 et 2. Le coefficient de x^2 est positif donc $x^2 - 2x \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x \geq 2$.

Ainsi, (I_1) est définie sur $D =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

Soit maintenant $x \in D$.

★ On suppose $x < \frac{3}{2}$. Alors x est solution de (I_1) car $x - \frac{3}{2} < 0$ et $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 0$.

★ On suppose $x \geq \frac{3}{2}$. Comme $x - \frac{3}{2} \geq 0$ et $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 0$:

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq x^2 - 2x \\ &\iff x^2 - 3x + \frac{9}{4} \leq x^2 - 2x \\ &\iff \frac{9}{4} \leq x\end{aligned}$$

Comme $\frac{9}{4} \geq 2 \geq \frac{3}{2}$, on en déduit que l'ensemble des solutions de (I_1) est $] -\infty, 0] \cup \left[\frac{9}{4}, +\infty\right[$.

2°) (I_2) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $X = \ln x$. x solution de $(I_2) \iff X^2 + 3X + 2 \geq 0$.

Le trinôme du second degré $X^2 + 3X + 2$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$.

Ses deux racines sont donc $\frac{-3-1}{2}$ et $\frac{-3+1}{2}$, ie -2 et -1 .

Comme le coefficient de X^2 est positif,

$$\begin{aligned}x \text{ solution de } (I_2) &\iff X \leq -2 \text{ ou } X \geq -1 \\ &\iff \ln x \leq -2 \text{ ou } \ln x \geq -1 \\ &\iff x \leq e^{-2} \text{ ou } x \geq e^{-1} \quad \text{car exp est strictement croissante}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (I_2) est $]0, e^{-2}] \cup [e^{-1}, +\infty[$.

3°) L'équation (E_3) est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff 2\sin^2(x) - 1 + \sin^2(2x) = 1 \\ &\iff -\cos(2x) + (1 - \cos^2(2x)) = 1 \\ &\iff \cos(2x) + \cos^2(2x) = 0 \\ &\iff \cos(2x)(1 + \cos(2x)) = 0 \\ &\iff \cos(2x) = 0 \text{ ou } 1 + \cos(2x) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \cos(2x) = -1 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \pi + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4°) On sait que $1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$. Notons $t = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$, on a donc :

$$1 = \frac{2t}{1 - t^2} \quad \text{d'où} \quad 1 - t^2 = 2t \quad \text{d'où} \quad t^2 + 2t - 1 = 0$$

Le trinôme du second degré $X^2 + 2X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$, ses racines sont donc

$$\frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

Or t est racine de ce trinôme, et c'est un réel positif puisque $\frac{\pi}{8} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Donc nécessairement $t = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1 + \sqrt{2}$.

Par ailleurs,

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 + 2 + 1 - 2\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Comme $\cos$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$, d'où :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{4 - 2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{2}}{(4 - 2\sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{2}}{16 - 8}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{Enfin, } \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Comme } \sin \text{ est positive sur } [0, \frac{\pi}{2}], \text{ on a } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

5°) L'équation (E_5) est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (E_5) &\iff \sin(4x - 3x) - \sin(4x + 3x) = \cos(4x) \\ &\iff \sin(4x)\cos(3x) - \cos(4x)\sin(3x) - (\sin(4x)\cos(3x) + \cos(4x)\sin(3x)) = \cos(4x) \\ &\iff -2\cos(4x)\sin(3x) - \cos(4x) = 0 \\ &\iff \cos(4x)(2\sin(3x) + 1) = 0 \\ &\iff \cos(4x) = 0 \quad \text{ou} \quad 2\sin(3x) + 1 = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \sin(3x) = -\frac{1}{2} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad 3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_5) est $\left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 3

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \text{ existe} \iff \cos(x) \neq 0$$

$$\text{Donc, } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2°) Soit $x \in D$.

— Alors $-x \in D$ et $f(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos(x)} = f(x)$.

— Alors $x + 2\pi \in D$ et $f(x + 2\pi) = \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{\cos(x)} = f(x)$.

Donc f est paire et 2π -périodique.

Par la 2π -périodicité, on peut réduire le domaine d'étude à un intervalle d'amplitude 2π par exemple $[-\pi, \pi] \cap D$. Puis, grâce à la parité, on peut réduire à $[0, \pi] \cap D = [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

Après avoir tracé sur le domaine réduit, on obtient la courbe sur $[-\pi, \pi] \cap D$ par symétrie par rapport à l'axe (Oy) . Puis on obtient la courbe sur D en effectuant des translations de vecteur $2\pi k \vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

3°) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(\pi - x) = \frac{1}{\cos(\pi - x)} = \frac{1}{-\cos(x)} = -f(x)$.

Notons M le point de la courbe d'abscisse x , M' le point de la courbe d'abscisse $\pi - x$.

On remarque que $\frac{x + (\pi - x)}{2} = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{f(x) + f(\pi - x)}{2} = 0$.

Donc, le point $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ est le milieu du segment $[M, M']$.

On en déduit que la courbe sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ se construit par la symétrie de centre A de la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

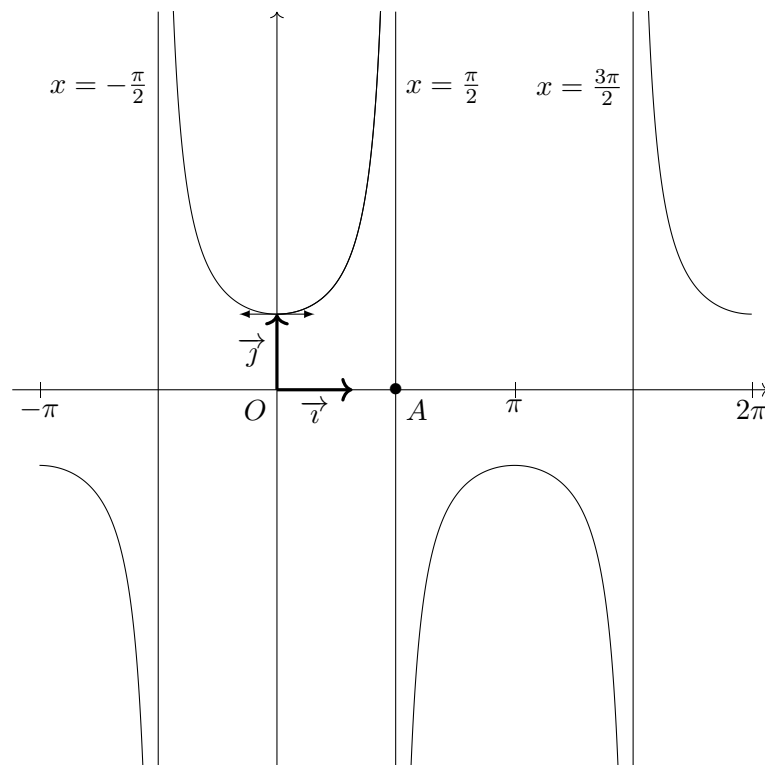
4°) f est dérivable sur D comme inverse d'une fonction dérivable.

$\forall x \in D$, $f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$, c'est du signe de $\sin(x)$.

D'où le tableau de variations sur $[0, \frac{\pi}{2}[$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+
f	1	$+\infty$

5°) Tracé de la courbe de f sur $[-\pi, 2\pi] \cap D$.



6°) f est continue $[0, \frac{\pi}{2}[$, qui est bien un intervalle, et f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

D'après le théorème de bijection, f réalise donc une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur J , avec $J = f([0, \frac{\pi}{2}[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x))$ i.e. $J = [1, +\infty[$.

7°) On appelle g sa fonction réciproque.

D'après le théorème de bijection, g est continue et strictement croissante sur l'intervalle J .

8°) Soit $x \in J = [1, +\infty[$.

Par définition de la fonction réciproque, on sait que $f(g(x)) = x$ (car $g(x)$ est l'unique antécédent de x par f appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}[$), i.e. $\frac{1}{\cos(g(x))} = x$.

On en déduit $\cos(g(x)) = \frac{1}{x}$.

Pour calculer $\sin(g(x))$, on utilise la formule, pour $u \in \mathbb{R}$, $\cos^2(u) + \sin^2(u) = 1$ que l'on applique à $u = g(x)$:

on a $\sin^2(g(x)) = 1 - \cos^2(g(x)) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Ainsi, $|\sin(g(x))| = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ car $x > 0$.

Or $0 \leq g(x) < \frac{\pi}{2}$ donc, $\sin(g(x))$ est positif, donc $\sin(g(x)) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

Exercice 4

Partie 1

1°) Utilisons (*) avec les réels 0 et 1 :

Alors, $f(1) = f(0)f(1) - f(0) - f(1) + 2$. Donc $8 = 8f(0) - f(0) - 6$ puisque $f(1) = 8$.

Ainsi $7f(0) = 14$ donc $\boxed{f(0) = 2}$.

2°) a) Utilisons (*) avec les réels x et $-x$:

$$f(x-x) = f(x)f(-x) - f(x) - f(-x) + 2$$

$$f(0) = f(x)f(-x) - f(x) - f(-x) + 2$$

$$\boxed{f(x) + f(-x) = f(x)f(-x)} \text{ car } f(0) = 2.$$

b) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $f(x) = 1$.

La relation ci-dessus donne alors $1 + f(-x) = f(-x)$ d'où $1 = 0$: absurde.

Donc $\boxed{f(x) \neq 1}$.

c) L'égalité trouvée en a) se réécrit $f(-x)(1 - f(x)) = -f(x)$. Comme $f(x) \neq 1$, on en tire :

$$\boxed{f(-x) = \frac{f(x)}{f(x) - 1}}.$$

3°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(n+1) - 1 \\ &= f(n)f(1) - f(n) - f(1) + 2 - 1 \quad \text{par (*) appliquée avec les réels } n \text{ et } 1 \\ &= 7f(n) - 7 \quad \text{car } f(1) = 8 \\ &= \boxed{7u_n} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 7.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7^n u_0$. Or $u_0 = f(0) - 1 = 1$, d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 7^n}$, puis comme $f(n) = u_n + 1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 7^n + 1.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{Z}^-$.

Alors $-n \in \mathbb{N}$, donc $f(-n) = 7^{-n} + 1$, et par 2c, $f(n) = \frac{f(-n)}{f(-n) - 1} = \frac{7^{-n} + 1}{7^{-n}} = 1 + 7^n$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, f(n) = 7^n + 1}$.

4°) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : f(nx) = (f(x) - 1)^n + 1$.

- Pour $n = 0$: $(f(x) - 1)^0 + 1 = 1 + 1 = 2 = f(0)$. Donc, H_0 est vraie.
- On suppose que H_n est vraie pour un rang n fixé dans $\mathbb{N}$.

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx)f(x) - f(nx) - f(x) + 2$$

par (*) appliquée avec les réels nx et x

$$= ((f(x) - 1)^n + 1)f(x) - (f(x) - 1)^n - 1 - f(x) + 2 \quad \text{par } H_n$$

$$= (f(x) - 1)^n(f(x) - 1) + f(x) - f(x) + 1$$

$$= (f(x) - 1)^{n+1} + 1$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

- On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f(nx) = (f(x) - 1)^n + 1, \text{ et ceci pour tout réel } x.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{Z}^-$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors $-n \in \mathbb{N}$ donc $f((-n)x) = (f(x) - 1)^{-n} + 1$. Par 2c :

$$f(nx) = \frac{f(-nx)}{f(-nx) - 1} = \frac{(f(x) - 1)^{-n} + 1}{(f(x) - 1)^{-n}} = 1 + (f(x) - 1)^n.$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, f(nx) = (f(x) - 1)^n + 1.}$$

5°) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la question 4b avec l'entier 2 et le réel $\frac{x}{2}$, ou bien en remplaçant x et y

par $\frac{x}{2}$ dans (*), on obtient : $f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)^2 + 1$.

Or $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 1$ par 2b. Donc $\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)^2 > 0$ d'où $\boxed{f(x) > 1}$.

6°) a) Puisque $q \in \mathbb{N}^*$, on peut utiliser 4b avec l'entier q et le réel $\frac{1}{q}$:

$$f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right) - 1\right)^q + 1$$

$$\text{Donc, puisque } f(1) = 8, \left(f\left(\frac{1}{q}\right) - 1\right)^q = 7.$$

$$\text{Comme } f\left(\frac{1}{q}\right) - 1 > 0 \text{ par 5, il vient : } \boxed{f\left(\frac{1}{q}\right) - 1 = 7^{\frac{1}{q}}}.$$

b) On utilise 4b avec l'entier relatif p et le réel $\frac{1}{q}$:

$$f(x) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right) - 1\right)^p + 1 = \left(7^{\frac{1}{q}}\right)^p + 1 = 7^{\frac{p}{q}} + 1.$$

$$\text{Ainsi, on a obtenu : } \boxed{f(x) = 7^x + 1}.$$

Partie2

- D'après ce qui précède, si f est solution du problème, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 7^x + 1$.
- Réciproquement, posons la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto 7^x + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x \ln 7} + 1$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions continues.

On a aussi : $f(1) = 8$.

Soit alors des réels x et y .

$$\begin{aligned} f(x)f(y) - f(x) - f(y) + 2 &= (7^x + 1)(7^y + 1) - 7^x - 1 - 7^y - 1 + 2 \\ &= 7^{x+y} + 7^x + 7^y + 1 - 7^x - 7^y \\ &= 7^{x+y} + 1 \\ &= f(x+y) \end{aligned}$$

Donc f vérifie (*).

- Finalement, on en déduit que $\boxed{x \mapsto 7^x + 1}$ est l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue telle que $f(1) = 8$ et vérifiant l'égalité (*).

***** FIN *****