

## Signaux Electriques

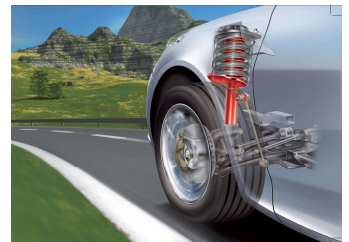
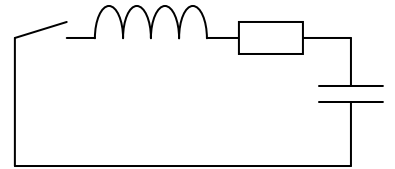
## SE4 Oscillateurs amortis en régime transitoire

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| I Le circuit RLC série en régime libre .....          | 1  |
| 1.) Mise en équation.....                             | 1  |
| 2.) Les solutions .....                               | 3  |
| II Réponse à un échelon de tension.....               | 8  |
| 1.) Les équations différentielles .....               | 8  |
| 2.) Mise en équation et résolution .....              | 8  |
| 3.) Les résultats .....                               | 9  |
| 4.) Bilan énergétique .....                           | 10 |
| III Oscillateur amorti avec frottement visqueux ..... | 11 |
| 1.) Mise en équation.....                             | 11 |
| 2.) Analogie électromécanique .....                   | 12 |
| 3.) Solutions .....                                   | 13 |
| 4.) Bilan énergétique .....                           | 14 |

### I Le circuit RLC série en régime libre

#### 1.) Mise en équation

##### a) Equation différentielle



b) Réduction canonique

On pose sur l'équation différentielle  $\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0}$

$$\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0}$$

$$2\lambda = \frac{R}{L} \quad \boxed{\lambda = \frac{R}{2L}} \quad \text{Coefficient d'amortissement}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{Pulsation propre}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \quad \boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}} \quad \text{Facteur de qualité}$$

## 2.) Les solutions

On remplace la fonction par 1, la dérivée première par  $r$ , la dérivée seconde par  $r^2$ .

Equation caractéristique  $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$  équation du second degré du type  $ar^2 + br + c = 0$  dont on cherche les racines. Discriminant :  $(\Delta = b^2 - 4ac)$   $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$

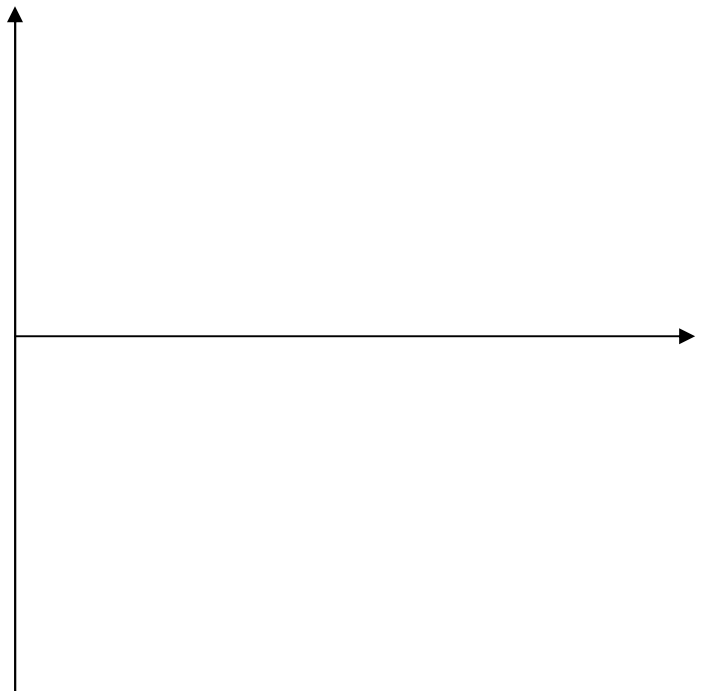
a) Cas  $\Delta < 0$  : Régime pseudopériodique

$$\lambda < \omega_0 \text{ ou } Q > \frac{1}{2} \text{ ou } R < R_c$$

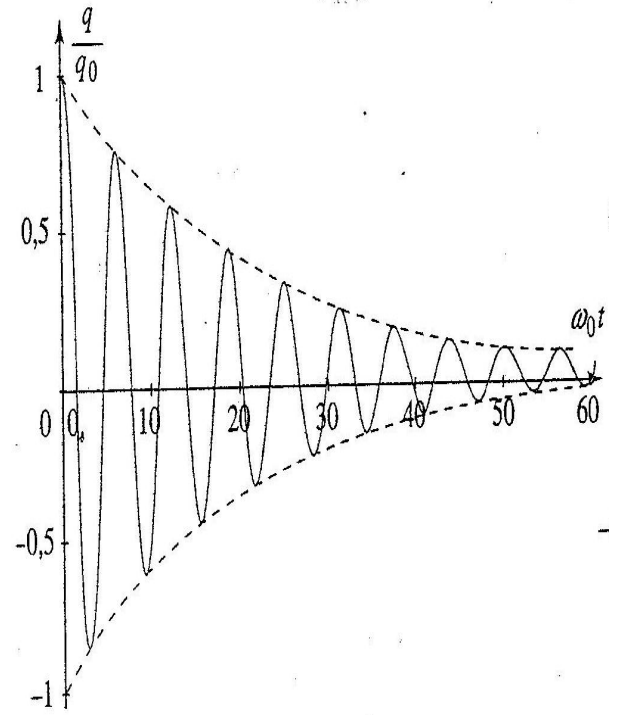
2 solutions complexes  $r_1$  et  $r_2$  de la forme  $r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$   $r = -\lambda \pm j\Omega$

$$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \text{Pseudo-pulsation}$$

Après calculs, on trouve :  $u_c(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) = e^{-\lambda t} [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)]$   
où  $a$ ,  $b$ ,  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.



Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre.  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$  donc  $T > T_0$ .



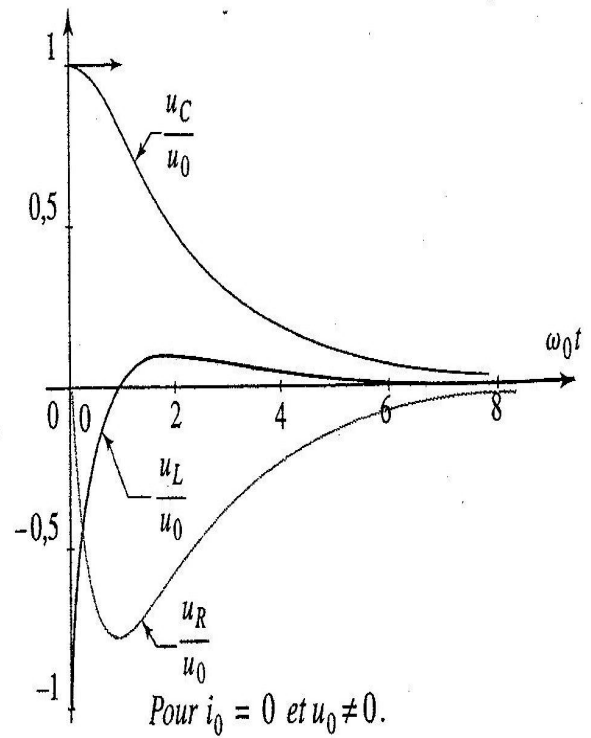
Doc. 18. Régime pseudo-périodique.  $Q = 10$ ;  $q(0) = q_0$  et  $i(0) = 0$ .



b)  $\Delta > 0$  Régime apériodique2 solutions réelles  $r_1$  et  $r_2$ 

$$\lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad R > R_C$$

$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad A, B \text{ constantes réelles.}$$



Doc. 15. d.d.p. aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques  $Q = 0,4$ .

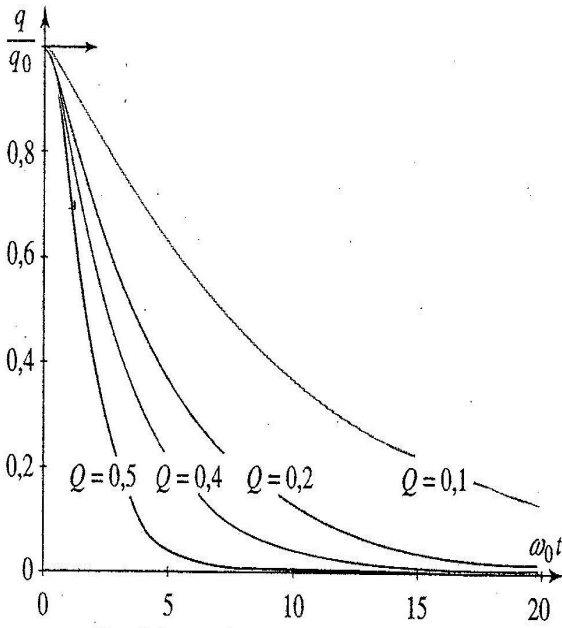
c)  $\Delta = 0$  : Régime critique

1 solution double réelle  $r_0$

$$Q = \frac{1}{2} \text{ ou } \lambda = \omega_0 \text{ ou } R = R_C$$

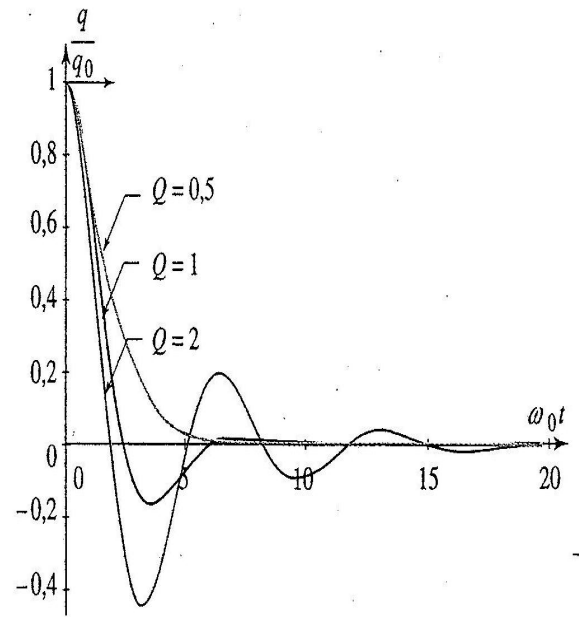
$$u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$

A, B constantes réelles.



Conditions initiales ( $q_0 \neq 0$ ,  $i_0 = 0$ ).

Doc. 14. Régimes apériodique ( $Q < 0,5$ ) et critique ( $Q = 0,5$ ).



Doc. 20. Régimes pseudo-périodique et critique.  
Condensateur initialement chargé  $i(0) = 0$ .

## II Réponse à un échelon de tension

### 1.) Les équations différentielles

Généralisation :

Commande  $f(t)$

Réponse  $y(t)$

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t) \quad \text{Equation différentielle du second ordre (ou du premier ordre si } a_2=0)$$

Solution complète :  $y(t) = y_l(t) + y_f(t)$

- $y_l(t)$  est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

$$a_0 y_f + a_1 \frac{dy_l}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_l}{dt^2} = 0$$

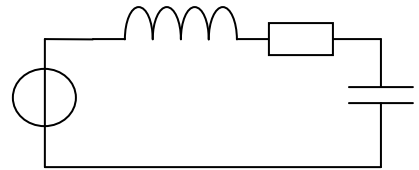
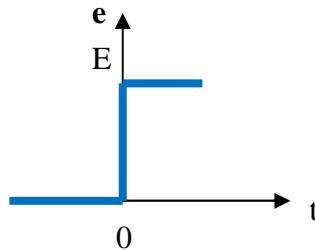
Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes).

- $y_f(t)$  est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète).

Elle correspond au régime permanent. Elle est du même type que le second membre :

Si  $f(t)$  est une constante,  $y_f(t)$  est aussi une constante.

### 2.) Mise en équation et résolution

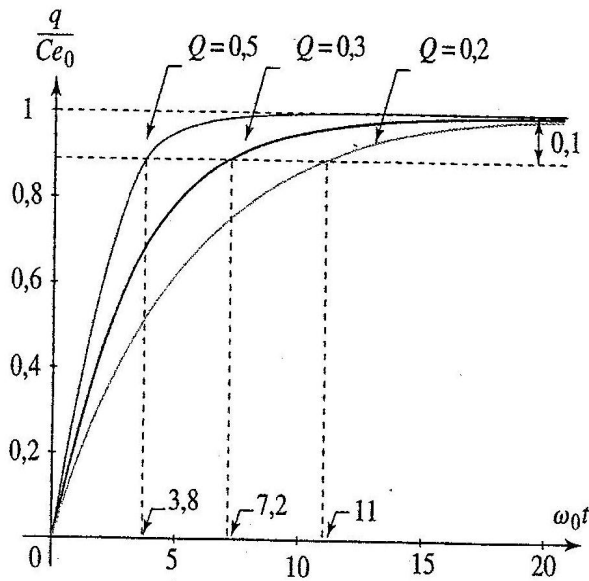


$$\Delta < 0 \quad u_C(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) + E = e^{-\lambda t} [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)] + E$$

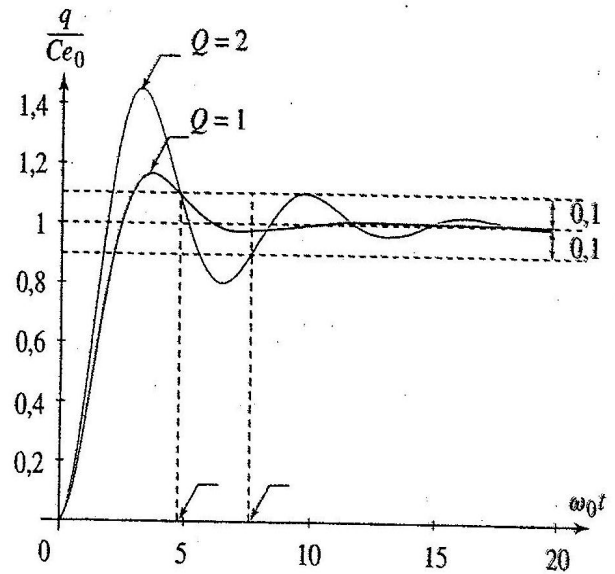
$$\Delta > 0 \quad u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + E$$

$$\Delta = 0 \quad u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t} + E$$

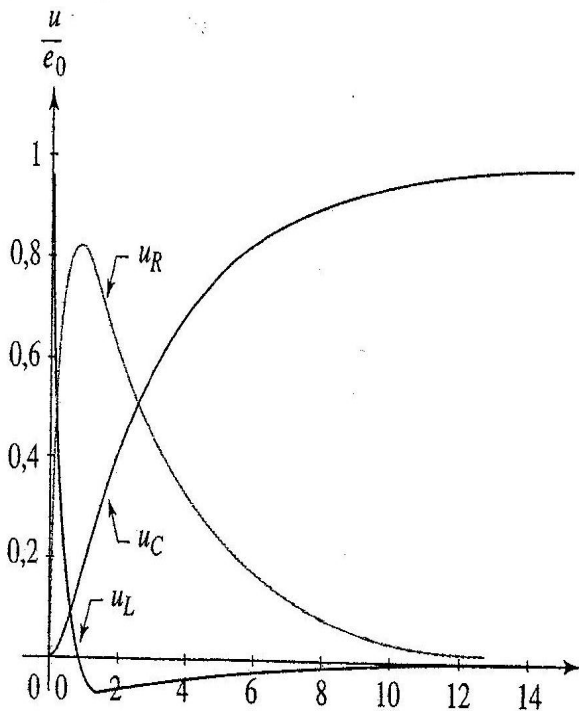
### 3.) Les résultats



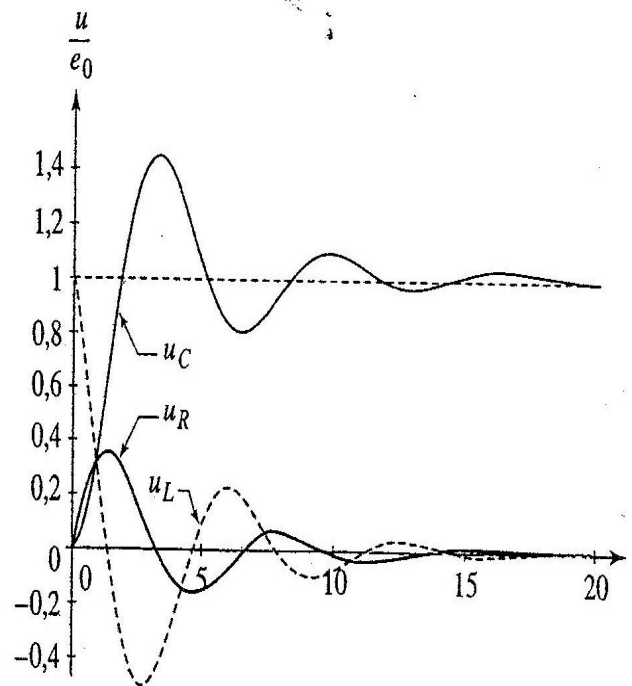
Doc. 35a. Réponse à un échelon de tension. Régimes apériodiques.



Doc. 36a. Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-périodiques.



Doc. 35c. Réponse à un échelon de tension.  $Q = 0,3$ .



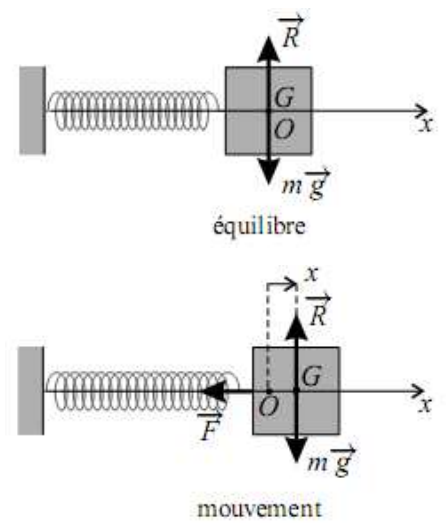
Doc. 36c. Réponse à un échelon de tension.  $Q = 2$ .

#### 4.) Bilan énergétique

### III Oscillateur amorti avec frottement visqueux

#### 1.) Mise en équation

[https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur\\_horizontal.php](https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php)



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

Formes canoniques :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

ou

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

| Pulsation propre | Coefficient d'amortissement | Facteur de qualité |
|------------------|-----------------------------|--------------------|
|                  |                             |                    |

## 2.) Analogie électromécanique

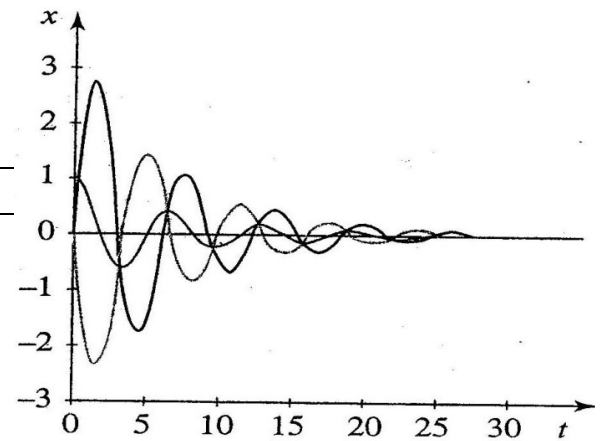
| Mécanique                          | Electricité |
|------------------------------------|-------------|
| Equation différentielle :          |             |
|                                    |             |
| Pulsation propre :                 |             |
| Facteur de qualité                 |             |
| Elongation :                       |             |
| Vitesse :                          |             |
| Masse :                            |             |
| Coefficient de frottement fluide : |             |
| Raideur du ressort :               |             |
| Energie mécanique :                |             |

### 3.) Solutions

#### a) Régime pseudo-périodique

$$\Delta < 0 \quad \lambda < \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q > \frac{1}{2}$$

$$u_c(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) = e^{-\lambda t} [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)]$$

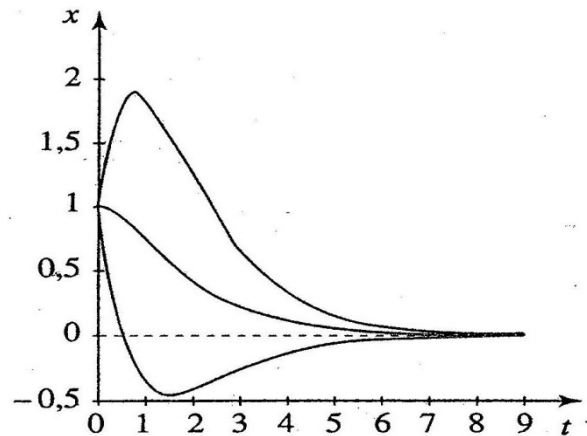


**Doc. 12.** Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime pseudo-périodique  $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$ .

#### b) Régime apériodique

$$\Delta > 0 \quad \lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2}$$

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

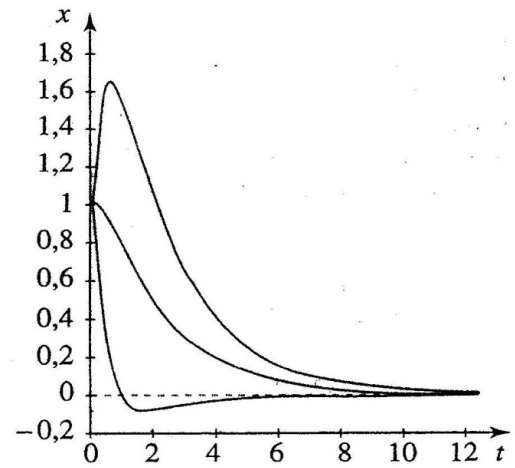


**Doc. 17.** Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime apériodique  $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$  suivant les conditions initiales, l'élongation passe par un extremum ou tend uniformément vers zéro.

## c) Régime critique

$$\Delta=0 \quad \lambda = \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$



**Doc. 15.** Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime critique  $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$ . Les conditions initiales sont les mêmes que celles du mouvement pseudo-périodique (doc. 12). Dans tous les cas, le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement.

## 4.) Bilan énergétique