

Signaux Electriques SE3 L'oscillateur harmonique

Introduction : définition de l'oscillateur harmonique.....	1
I Oscillations électrique : exemple du circuit LC.....	1
1.) Equation différentielle et résolution.....	1
2.) Bilan de puissance et d'énergie.....	2
II Oscillations mécaniques : exemple du ressort horizontal.....	3
1.) Etude dynamique : Deuxième loi de Newton.....	3
2.) Etude énergétique.....	6



Introduction : définition de l'oscillateur harmonique

On appelle oscillateur harmonique un système physique décrit par une grandeur $x(t)$ dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique (constante réelle positive, en rad.s^{-1}).

Solution $x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$ a, b, A et ϕ constantes, déterminées par les conditions initiales
 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ A est l'amplitude, positive et ϕ l'avance de phase à l'origine.

Rq: $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$
 $= A(\cos(\omega_0 t) \cos(\phi) - \sin(\omega_0 t) \sin(\phi))$
 $x = A \cos \phi \cos(\omega_0 t) - A \sin \phi \sin(\omega_0 t)$
 $a = A \cos \phi \quad b = -A \sin \phi$

$$a^2 + b^2 = A^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2$$

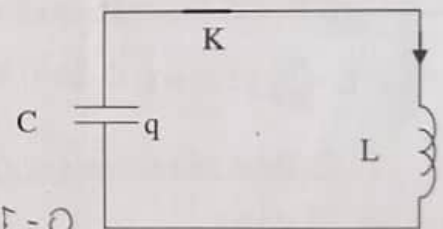
$$\Rightarrow A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{b}{a} = -\frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} \Rightarrow \tan \phi = -\frac{b}{a}$$

I Oscillations électrique : exemple du circuit LC

1.) Equation différentielle et résolution

Le condensateur est initialement chargé, et K est ouvert depuis longtemps. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.



$t < 0$: Chargé et $i = 0$

(K ouvert)

$$u_C(0^-) = u_{C0}$$

$$i(0) = 0$$

$$E = \frac{1}{2} C u_C^2 \text{ et } E = \frac{1}{2} L i^2$$

sont des fonctions continues du tps

donc $u_C(0^+) = u_C(0^-)$
 $i(0^+) = i(0^-)$

$$u_C(0^+) = a \cos 0 + b \sin 0 = a$$

$$u_C(0^+) = u_{C0} \Rightarrow a = u_{C0}$$

$$\frac{du_C}{dt} = a [-\omega_0 \sin(\omega_0 t)] + b [\omega_0 \cos(\omega_0 t)]$$

$$\text{Rq: } [\sin(\alpha x)]' = \alpha \cos(\alpha x)$$

$$[\cos(\alpha x)]' = -\alpha \sin(\alpha x)$$

On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

pulsation propre :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

$$\Rightarrow u_C(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad u_C(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{\Gamma} = \frac{d^2 \Gamma}{dt^2} = -a C \omega_0 \sin(\omega_0 t) + b C \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{\Gamma}(0^+) = -a C \omega_0 \sin(0) + b C \omega_0 \cos(0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\Gamma}(0^+) = b C \omega_0 \\ \Gamma(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow u_c(t) = u_{c0} \cos(\omega_0 t)$$

$$\Gamma(t) = u_{c0} C \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

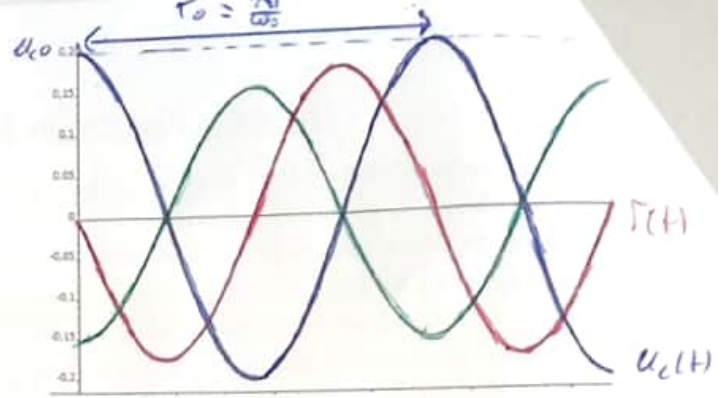
Rq: $\cos x$ est périodique de période 2π

$\Rightarrow \cos(\omega_0 t)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\begin{aligned} \text{Rq: } \cos(\omega_0 t + n 2\pi) &= \cos(\omega_0 t) \\ &= \cos\left[\omega_0 \left(t + n \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\text{Rq: } \frac{d\Gamma}{dt} = -L u_{c0} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

$$u_L = L \frac{d\Gamma}{dt} = -L C u_{c0} \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$



$$\frac{d\Gamma}{dt}$$

$$u_L = -u_{c0} \cos(\omega_0 t) \text{ car } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_L = -u_c} \quad (1)$$

T_0 : période propre en s

$f_0 = \frac{1}{T_0}$: fréquence propre Hz

2.) Bilan de puissance et d'énergie

$$\textcircled{1} u_L + u_c = 0$$

$$(x_i) u_L \Gamma + u_c \dot{\Gamma} = 0$$

$$u_L = L \frac{d\Gamma}{dt} \quad \Gamma = C \frac{du_c}{dt}$$

$$\Rightarrow L \Gamma \frac{d\Gamma}{dt} + C u_c \frac{du_c}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L \Gamma^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow P_{\text{maguel}} + P_{\text{mague C}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (E_L + E_C) = 0 \quad \forall t$$

$$\text{à } t=0^+ \quad E_L = \frac{1}{2} C u_{c0}^2$$

$$\Rightarrow E_L + E_C = \frac{1}{2} C u_{c0}^2$$

Il y a échange d'énergie entre L et C [quand $|u_c|_{\text{max}}$, $\Gamma = 0$ et l'inversement
mais la somme des énergies de

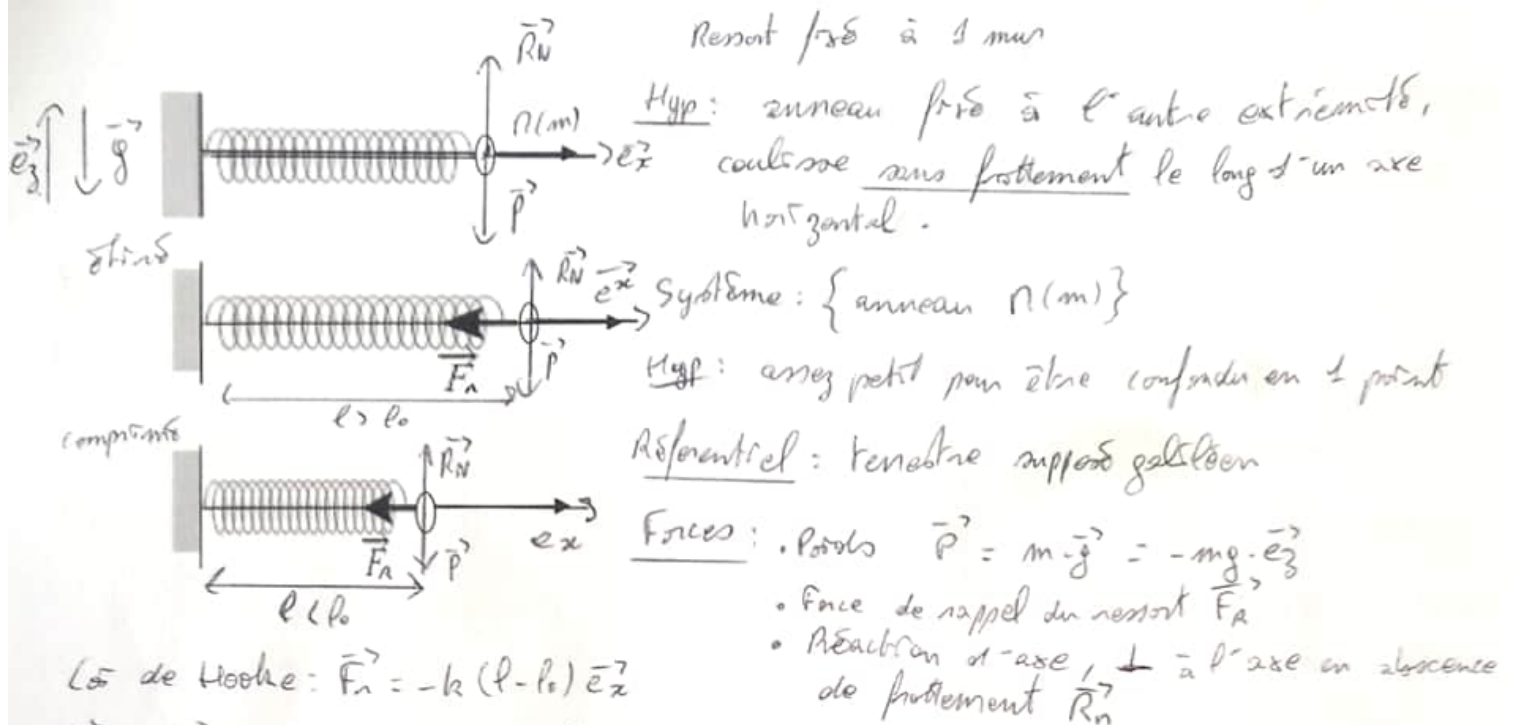
perle par effet joule

$\rightarrow$ diminution de l'amplitude du signal

II Oscillations mécaniques : exemple du ressort horizontal

1.) Etude dynamique : Deuxième loi de Newton

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php



Loi de Hooke: $\vec{F}_R = -k(l - l_0) \vec{e}_x$

où $\vec{e}_x$ est le sens de l'élongement du ressort

[k : coefficient de raideur (en $N \cdot m^{-1}$)
 l_0 : longueur à vide]

si $l > l_0$: $k > 0$ $(l - l_0) > 0$

si $l < l_0$: $k > 0$ $(l - l_0) < 0$

À l'équilibre: $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_R = \vec{0}$

projections sur $\vec{e}_x$: $-k(l_{eq} - l_0) = 0$
 $\Rightarrow l_{eq} = l_0$

projections sur $\vec{e}_z$: $R_N - m \cdot g = 0 \Rightarrow R_N = mg$

2ème loi de Newton:

$\sum \vec{F} = m \vec{a}_n$

On pose $x = l - l_0$ où $l(t)$ et $x(t)$

$\vec{O}n = x \vec{e}_x$ $\vec{v}_n = \frac{d\vec{O}n}{dt} = \dot{x} \vec{e}_x$

$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \ddot{x} \vec{e}_x$ ($\vec{e}_x$ cste)

proj sur (Ox) : $m\ddot{x} = -kx$ ①

sur (Oz) : $R_N = m \cdot g$

① $\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ équation du mouvement

On pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m} > 0$

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$
 $x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$

CI à $t=0$, on étire le ressort et on le lâche sans vitesse initiale

$x(0) = x_0$
 $v(0) = 0$

$x(0) = a \cos(\omega_0 \cdot 0) + b \sin(\omega_0 \cdot 0)$

$a = x_0$

$v = \dot{x} = -a \omega_0 \sin(\omega_0 t) + b \omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$v(0) = -a \omega_0 \sin(0) + b \omega_0 \cos(0) = b \omega_0 = 0$

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

$\Rightarrow b = 0$
 $\omega_0 \neq 0$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Rq: Si on prend $\vec{e}_x$ dans le même sens de compression du ressort
 $\vec{F}_R = +k(l - l_0)\vec{e}_x$

Rq: $x(0) = 0$ $v(0) = v_0$

Cl $\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$
 à faire

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ (A)

$v(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$ (B)

$a(t) = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$ (C)

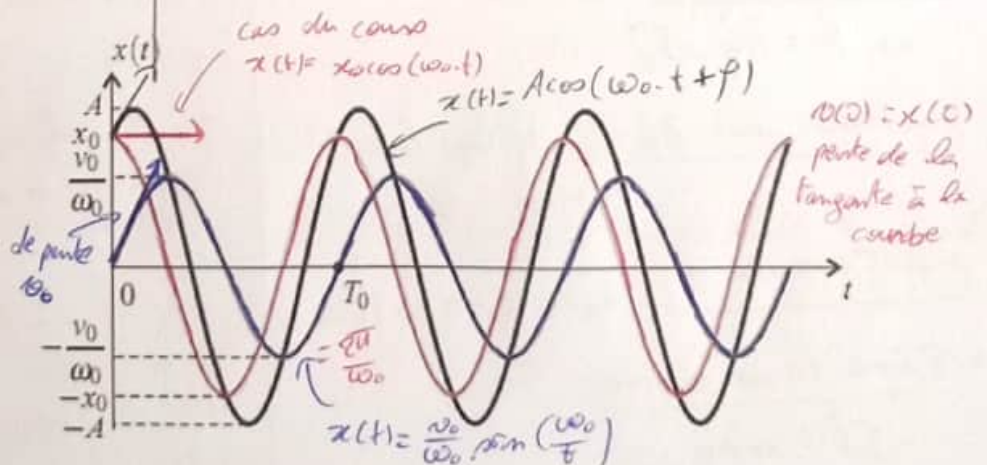


Figure 1.2 - Représentation graphique de $x(t)$ en fonction de t . En gris clair : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$; en gris foncé : cas $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$; en noir : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$. La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ (voir paragraphe 2).

Remarque : $x = A \cos(\omega_0 t)$ $y = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

φ avance de phase à l'origine
 y est en avance / x car elle passe
 avant par son maximum $\Rightarrow \varphi > 0$

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= A \cos(\omega_0 (t + \frac{\varphi}{\omega_0}))$$

On pose $\varphi = \omega_0 \Delta t$ décalage temporelle

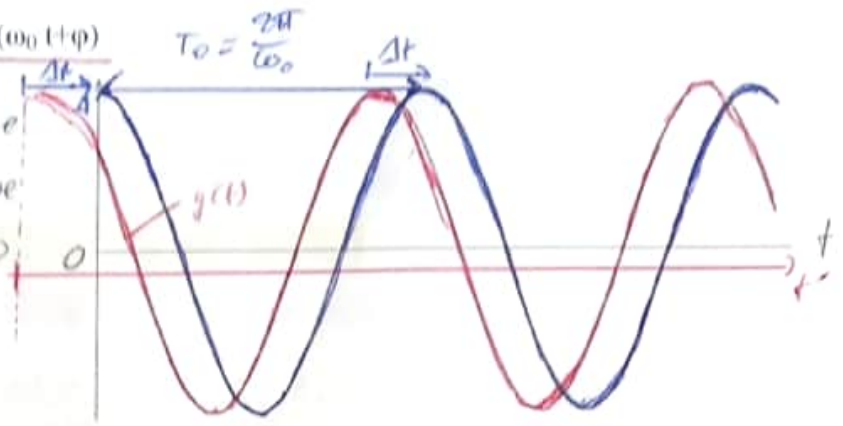
$$\varphi = \omega_0 \Delta t$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T_0}$$

$$\Rightarrow y(t) = A \cos(\omega_0 (t + \Delta t))$$

On pose $t' = t + \Delta t$

$$t' = 0 \Rightarrow t = -\Delta t \Rightarrow y(t') = A \cos(\omega_0 t')$$



$$\textcircled{B} v_n(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$v_n(t) = x_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$



$$\varphi = \omega_0 \Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T_0}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\varphi T_0}{2\pi}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2} \times \frac{T_0}{2\pi} = \frac{T_0}{4}$$

v_n est en avance de $\frac{\pi}{2}$ / $x(t)$

ou de $\frac{T_0}{4}$: elle est en quadrature avec

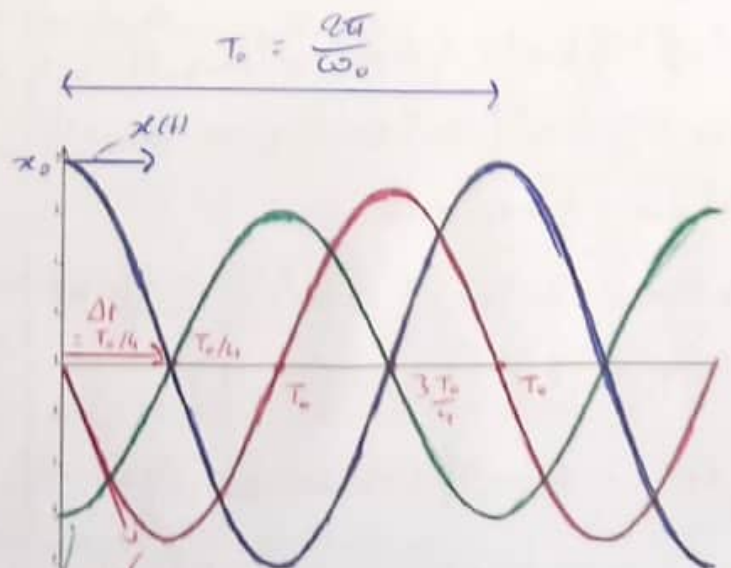
$$\textcircled{C} a_n(t) = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

$$a_n(t) = x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \pi)$$

$$\varphi = \pi \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi \times T_0}{2\pi} = \frac{T_0}{2}$$

a_n est en opposition de phase / $x(t)$

Rq: $a_n(t) = \ddot{x}(t) = \omega_0^2 x$
 on retrouve l'équation



$$v = \dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

en avance de $T_0/4$ / $x(t)$

2.) Etude énergétique

Rappels * * * *

Travail d'une force constante, lorsque son point d'application M se déplace de A à B : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

Si le travail de F ne dépend pas du chemin suivi, la force est dite conservative et le travail s'écrit sous la forme :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -[Ep(B) - Ep(A)] = -\Delta Ep$$

Energie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgz + cste$ si z est l'altitude $\uparrow \vec{e}_z$

Energie potentielle élastique : $Ep_e = \frac{1}{2} kx^2 + cste$ où $x = l - l_0$

Energie cinétique : $Ec(M) = \frac{1}{2} m v^2(M)$

L'énergie mécanique $Em = Ec + Ep$ se conserve si toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle (en l'absence de frottements)

$Em = Ec + Ep = cste$ en l'absence de frottements.

Pour le ressort horizontal :

$$Em = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 + cste \quad (E_{pp} = cste)$$

On choisit $cste = 0$

$$Em = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

C.I. : $x(0) = x_0 \quad v(0) = 0$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$v(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\bullet \quad Ec = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m \omega_0^2 = k$$

$$Ec = \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\bullet \quad E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$Em = \frac{1}{2} k x_0^2 (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t))$$

$$\Rightarrow \boxed{Em = \frac{1}{2} k x_0^2} \text{ cste}$$

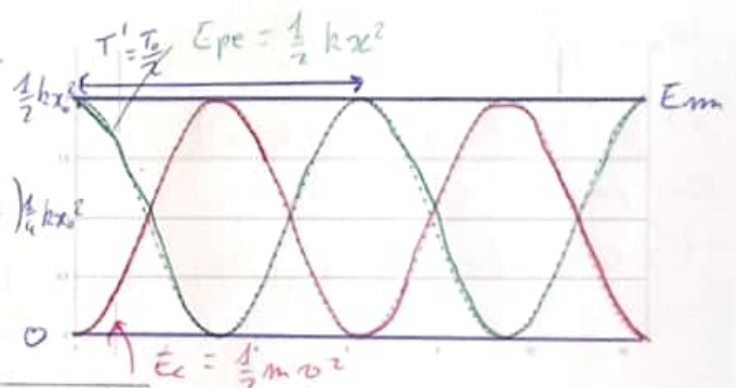
$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \Rightarrow \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2} k x_0^2 \left(\frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2} \right)$$

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{4} k x_0^2 [1 + \cos(2\omega_0 t)]}$$

$$-1 \leq \cos(2\omega_0 t) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq E_{pe} \leq \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$\omega' = 2\omega_0 \text{ où } \omega' = \frac{2\pi}{T'} \text{ et } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T'} = 2 \times \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T' = \frac{T_0}{2}$$