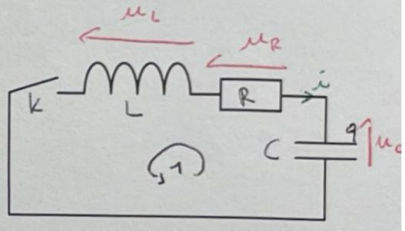
Signaux Electriques — SE4 Oscillateurs amortis en régime transitoire

I Le circuit RLC série en régime libre 1
1.) Mise en équation 1
2.) Les solutions 3
II Réponse à un échelon de tension 8
1.) Les équations différentielles 8
2.) Mise en équation et résolution 8
3.) Les résultats 9
4.) Bilan énergétique 10
III Oscillateur amorti avec frottement visqueux 11
1.) Mise en équation 11
2.) Analogie électromécanique 12
3.) Solutions 13
4.) Bilan énergétique 14

CI : $u_c(0^-) = u_{c0}$

$i(0^-) = 0$.



I Le circuit RLC série en régime libre

1.) Mise en équation

a) Equation différentielle

- Equation de maille :

$$u_c + u_R + u_L = 0 \quad (1) \Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + u_c = 0 \quad (1')$$

$$\Rightarrow u_c + RC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0. \quad (2)$$

On dérive (1') :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{du_c}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0. \quad (3)$$

Rq : $q = Cu_c$.

(2) × C : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$ (4)

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}Cu_c^2$ est continue donc $u_c(0^+) = u_c(0^-)$

$\Rightarrow u_c(0^+) = u_{c0}$.

$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$ est continue donc $i(0^+) = i(0^-)$

$\Rightarrow i(0^+) = 0$.

Rq : (1') à $t = 0^+$: $L\frac{di}{dt}(0^+) + Ri(0^+) + u_c(0^+) = 0$

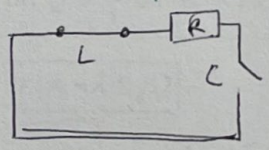
$$\Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{-u_{c0}}{L}$$

Rq 2 : à $t\infty$: régime permanent continu :

$u_L = L\frac{di}{dt} = 0$ car i = cste $\Rightarrow$ L ≃ fil

$i = C\frac{du_c}{dt} = 0$ car u_c = cste $\Rightarrow$ C ≃ int. ouv.

Schéma équivalent.



$i(t\infty) = 0$

$u_L(t\infty) = 0$

$u_R(t\infty) = 0$

(1) eq de maille :

$u_L + u_R + u_c = 0 \Rightarrow u_c(t\infty) = 0$.



Scanned with CamScanner

b) Réduction canonique

On pose sur l'équation différentielle $\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_c}{dt}+\frac{1}{LC}u_c(t)=0$ (2)

(a) $\frac{d^2u_c}{dt^2}+2\lambda\frac{du_c}{dt}+\omega_0{}^2u_c(t)=0$ ou (b) $\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt}+\omega_0{}^2u_c(t)=0$

(2) et (a) $2\lambda=\frac{R}{L}$ $\Rightarrow$ $\lambda=\frac{R}{2L}>0$ Coefficient d'amortissement (en s^{-1})

$\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}>0$ Pulsation propre (cf SE3). (en $rad.s^{-1}$)

(2) et (b) $\frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L}$ $Q=\frac{L\omega_0}{R}=\frac{1}{RC\omega_0}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}>0$ Facteur de qualité (ss dimension).

Rq : $Q=\frac{L\omega_0}{R}\times\frac{\omega_0}{\omega_0}=\frac{L\omega_0^2}{\omega_0}$.

or $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ $\Rightarrow$ $Q=\frac{L}{R\omega_0}\times\frac{1}{LC}=\frac{1}{RC\omega_0}$

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q=\frac{L\omega_0}{R}=\frac{L}{R}\times\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q=\frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$ $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Par identification entre (a) et (b) :

$2\lambda=\frac{\omega_0}{Q}$ $\Rightarrow$ $\lambda=\frac{\omega_0}{2Q}$ (c)

2.) Les solutions

Dans ⓐ, On remplace la fonction par 1, la dérivée première par r, la dérivée seconde par r^2.

Equation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ équation du second degré du type $ar^2 + br + c = 0$ dont on cherche les racines. Discriminant : $(\Delta = b^2 - 4ac)$ $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$

$\Delta = 4(\lambda - \omega_0)(\lambda + \omega_0)$.

1er cas : $\Delta > 0$: $\lambda > \omega_0$

ⓔ : $\Rightarrow \frac{\omega_0}{2Q} > \omega_0$. $\Rightarrow Q < \frac{1}{2}$.

Or $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $R > R_c$ où $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

R_c : résistance critique.

• 2 racines réelles : $(r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a})$

$r = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2} \Rightarrow r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.

$(r_1 < 0$ et $r_2 < 0)$.

2e cas : $\Delta < 0$: $\lambda < \omega_0$ ou $Q > \frac{1}{2}$ ou $R < R_c$

2 solutions complexes : $r = \frac{-b \pm j\sqrt{\Delta}}{2a}$ $(i = j)$ math physique.

$r = \frac{-2\lambda \pm j\sqrt{4\omega_0^2 - 4\lambda^2}}{2a}$ $r = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

2e cas : $\Delta = 0$. $\lambda = \omega_0$ ou $Q = \frac{1}{2}$ où $R = R_c$.

1 solution double réelle :

$r_0 = \frac{-b}{2a}$ $r_0 = -\lambda$

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Rightarrow r = -\lambda \pm j\Omega$.

a) Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique $\lambda < \omega_0$ ou $Q > \frac{1}{2}$ ou $R < R_C$

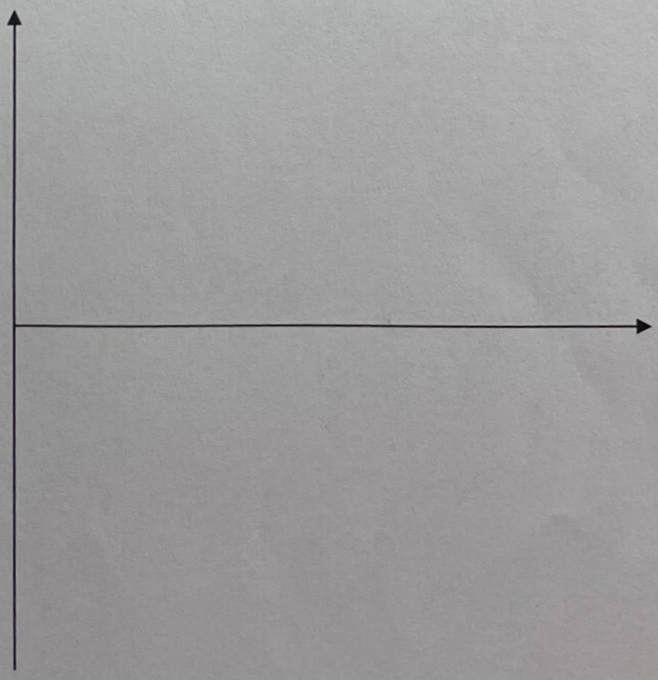
2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme $r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $r = -\lambda \pm j\Omega$

$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ Pseudo-pulsation

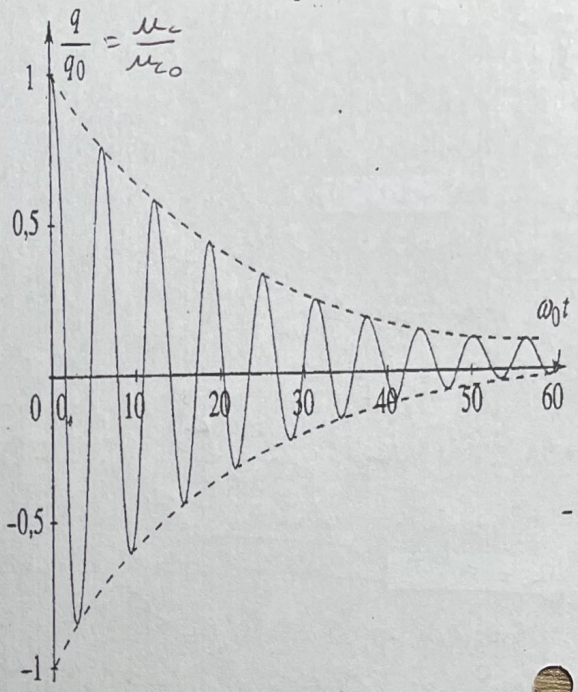
$T = \frac{2\pi}{\Omega}$ pseudo-période.

Après calculs, on trouve : $u_C(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) = e^{-\lambda t}[a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)]$

où a, b, A et φ sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.



Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre. $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$ donc $T > T_0$.

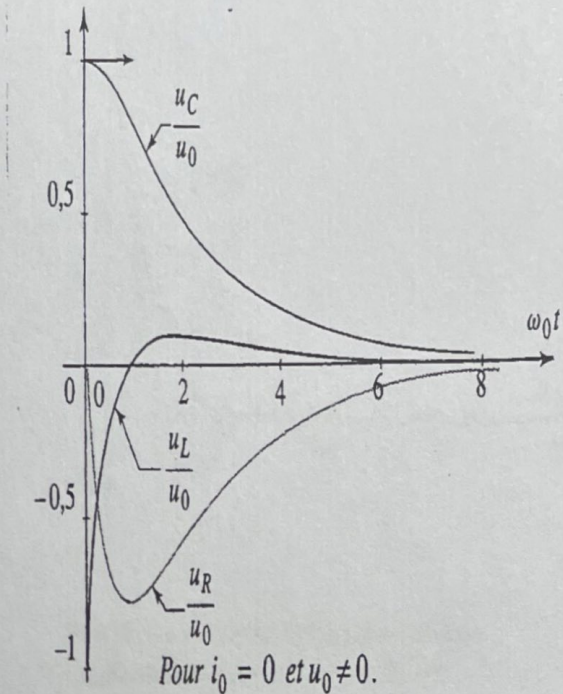


Doc. 18. *Régime pseudo-périodique.* $Q = 10$; $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$.

Scanned with CamScanner

b) $\Delta > 0$ Régime apériodique 2 solutions réelles r_1 et r_2 $\lambda > \omega_0$ ou $Q < \frac{1}{2}$ ou $R > R_C$

$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ A, B constantes réelles.

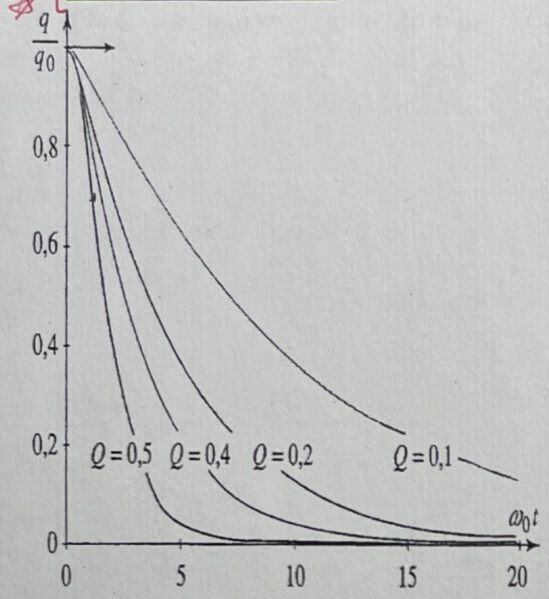


Pour $i_0 = 0$ et $u_0 \neq 0$.

Doc. 15. d.d.p. *aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques* $Q = 0{,}4$

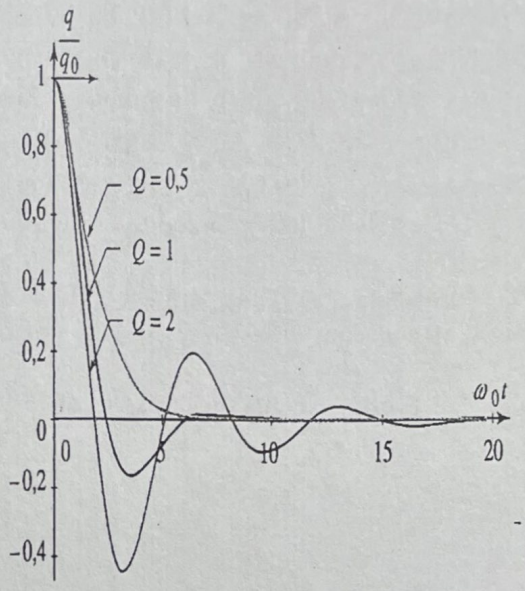
c) $\Delta = 0$: Régime critique — 1 solution double réelle r_0 — $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{\lambda = \omega_0}$ ou $\boxed{R = R_C}$

$\boxed{u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t}}$ — A, B constantes réelles.



Conditions initiales ($q_0 \neq 0$, $i_0 = 0$).

Doc. 14. *Régimes apériodique* ($Q < 0,5$) *et critique* ($Q = 0,5$).



Doc. 20. *Régimes pseudo-périodique et critique. Condensateur initialement chargé* $i(0) = 0$.

Scanned with CamScanner