2.) Les solutions

Dans ②, On remplace la fonction par 1, la dérivée première par r, la dérivée seconde par r^2.

Equation caractéristique $\boxed{r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0}$ équation du second degré du type $ar^2 + br + c = 0$ dont on cherche les racines. Discriminant : $(\Delta = b^2 - 4ac)$ $\boxed{\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2}$

$\Delta = 4(\lambda - \omega_0)(\lambda + \omega_0)$.

1er cas : $\Delta > 0$: $\lambda > \omega_0$

② : $\Rightarrow \frac{\omega_0}{2Q} > \omega_0 \Rightarrow \boxed{Q < \frac{1}{2}}$.

Or $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\boxed{R > R_c}$ où $\boxed{R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$

R_c : résistance critique.

• 2 racines réelles : $(r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a})$

$r = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2} \Rightarrow r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.

$(r_1 < 0$ et $r_2 < 0)$.

2e cas : $\Delta < 0$: $\lambda < \omega_0$ ou $Q > \frac{1}{2}$ ou $R < R_c$

2 solutions complexes : $\boxed{r = \frac{-b \pm j\sqrt{\Delta}}{2a}}$ $(i = j)$ maths physique.

$r = \frac{-2\lambda \pm j\sqrt{4\omega_0^2 - 4\lambda^2}}{2a}$ $\boxed{r = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ $\Rightarrow r = -\lambda \pm j\Omega$.

• 3e cas : $\Delta = 0$. $\lambda = \omega_0$ ou $Q = \frac{1}{2}$ où $R = R_c$.

1 solution double réelle :

$r_0 = \frac{-b}{2a}$ $\boxed{r_0 = -\lambda}$

a) Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique $\boxed{\lambda < \omega_0 \text{ ou } Q > \frac{1}{2} \text{ ou } R < R_C}$

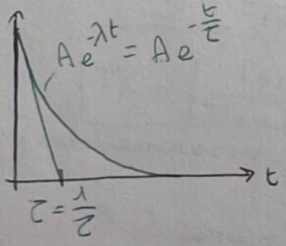
2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme $r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\boxed{r = -\lambda \pm j\Omega}$ $\lambda = |Re(r)| > 0$ $R = |Im(r)| > 0$

$\boxed{\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ Pseudo-pulsation $\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega}}$ pseudo-période.

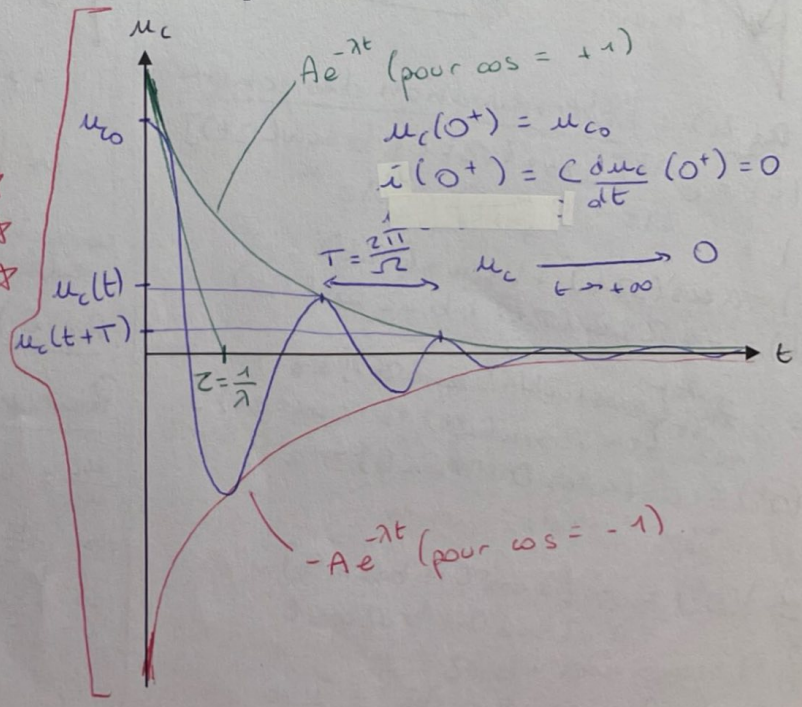
Après calculs, on trouve : $\boxed{u_C(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) = e^{-\lambda t}[a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)]}$

où a, b, A et φ sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.

Oscillations amorties :

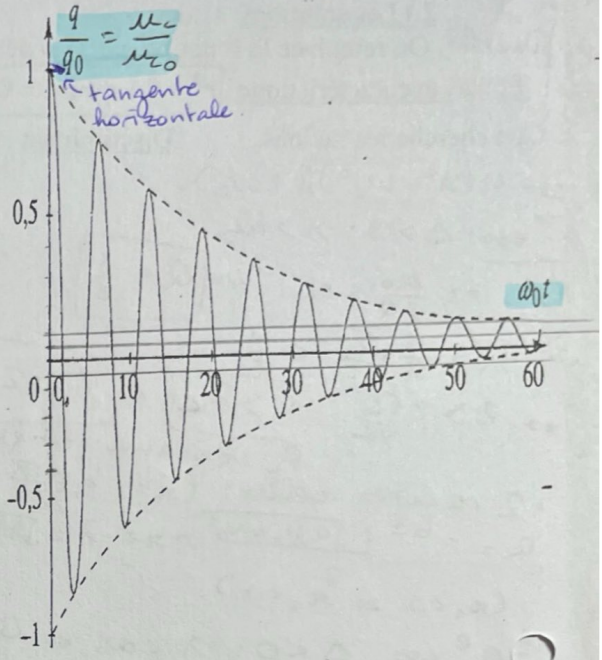


Au bout de 5τ, le régime permanent est atteint.



Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre. $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$ donc $T > T_0$.

$(T = \frac{2\pi}{\Omega}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0})$



Doc. 18. *Régime pseudo-périodique.* $Q = 10$; $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$.

Rq 2): Cas $R = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0$

$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0$ cf SE 3

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$u_c(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

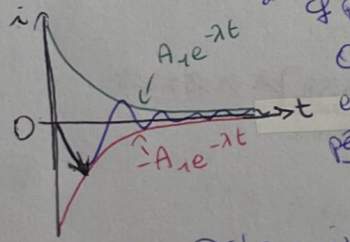
Oscillations non amorties

En pratique si $\lambda << \omega_0$, ou $R << R_c$, ou $Q >> \frac{1}{2}$ alors $T \simeq T_0$.

Rq 3): Courant $i(t)$ vérifie la même équa diff que $u_c(t)$ $\Rightarrow$ même solution.

$i(t) = A_1 e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi_1)$

$i(0^+) = 0$ et $\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{u_{c0}}{L} < 0$ cf p1.



Oscillations amorties en régime pseudo-périodique.

Rq 4): Détermination des constantes

$u_c(t) = e^{-\lambda t}[a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)]$

$f(t) = e^{-\lambda t}$ $\quad f'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$

$g(t) = a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)$

$g'(t) = -a\Omega\sin(\Omega t) + b\Omega\cos(\Omega t)$

$\frac{du_c}{dt} = -\lambda e^{-\lambda t}[a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)] + e^{-\lambda t}[-a\Omega\sin(\Omega t) + b\Omega\cos(\Omega t)]$

$u_c(0^+) = e^0[a\cos 0 + b\sin 0] = a$

$\Rightarrow a = u_{c0}$

$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(0^+) = -\lambda[a\cos 0 + b\sin 0] - a\Omega\sin 0 + b\Omega\cos 0$

$= -\lambda a + b\Omega = 0$

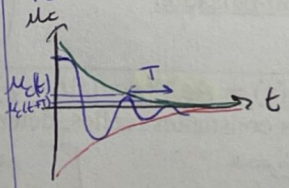
$\Rightarrow b\Omega = \lambda a \Rightarrow b = \frac{\lambda a}{\Omega} = \frac{\lambda u_{c0}}{\Omega}$.

$u_c(t) = e^{-\lambda t}\left[u_{c0}\cos(\Omega t) + \frac{\lambda u_{c0}}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]$

$\boxed{u_c(t) = u_{c0} e^{-\lambda t}\left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]}$

Rq 5): Décrément logarithmique (cf TP)

Points de contact successifs avec $A e^{-\lambda t}$.



$\frac{u_c(t+T)}{u_c(t)} = \frac{A e^{-\lambda(t+T)}}{A e^{-\lambda(t)}}$

$= e^{-\lambda T}$

$\Rightarrow \ln\left[\frac{u_c(t+T)}{u_c(t)}\right] = -\lambda T$

$\Rightarrow \boxed{\delta = \ln\left[\frac{u_c(t)}{u_c(t+T)}\right] = \lambda T}$

caractérise la décroissance des oscillations.

Rq 6): Temps de réponse à 5%

Pour un 1er ordre : $u_c(t) = u_{c0} e^{-\frac{t}{\tau}}$ (SE 2)

$\frac{u_c}{u_{c0}} = e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{5}{100}$

$\Rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{5}{100}\right)$

$\Rightarrow -\frac{t}{\tau} \simeq -3 \Rightarrow t_{5\%} \simeq 3\tau$.

On l'utilise pour la courbe enveloppe du second ordre.

en $Ae^{-\lambda t}$ avec $\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda}}$

Or $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$.

$\Rightarrow \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ or $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$\Rightarrow \tau = \frac{2Q}{2\pi} \times T_0$ $\boxed{\tau = \frac{QT_0}{\pi}}$

$t_{r5\%} \simeq 3\tau \simeq 3\frac{QT_0}{\pi}$

$\pi \simeq 3,14$ $\boxed{t_{r5\%} \simeq QT_0}$

Si Q est grand : $T \simeq T_0$

$\Rightarrow t_{5\%} \simeq QT$ $\boxed{\frac{t_{5\%}}{T} \simeq Q}$

On compte environ 10 oscillations

$t_{5\%} \simeq 10T \Rightarrow \boxed{Q \simeq 10}$

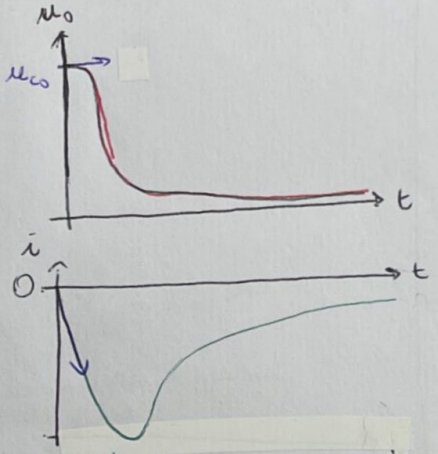
Finalement, le nombre d'oscillations d'amplitude non négligeable donne une valeur approx de Q (si $Q >> \frac{1}{2}$)

☆☆☆

b) Δ > 0 Régime apériodique 2 solutions réelles r_1 et r_2 $\lambda > \omega_0$ ou $Q < \frac{1}{2}$ ou $R > R_C$

$r_1 < 0$ $r_2 < 0$

$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ A, B constantes réelles.



$u_c(0^+) = u_{C0}$

$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(0^+) = 0$

$u_c \to 0$
$t \to +\infty$

$i(0^+) = 0$

$\left(\frac{di}{dt}\right)(0^+) = -\frac{u_{C0}}{L}$

$i \to 0$
$t \to +\infty$

Rq : $u_c(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

$\frac{du_c}{dt} = Ar_1 e^{r_1 t} + Br_2 e^{r_2 t}$

$u_c(0^+) = A + B = u_{C0}$

$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(0^+) = Ar_1 + Br_2 = 0$

$\Rightarrow (u_{C0} - B)r_1 + Br_2 = 0$

$\Rightarrow u_{C0} r_1 - Br_1 + Br_2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{B = \frac{u_{C0} r_1}{r_1 - r_2}}$

$A = u_{C0} - \frac{u_{C0} r_1}{r_1 - r_2}$

$= \frac{u_{C0} r_1 - u_{C0} r_2 - u_{C0} r_1}{r_1 - r_2}$

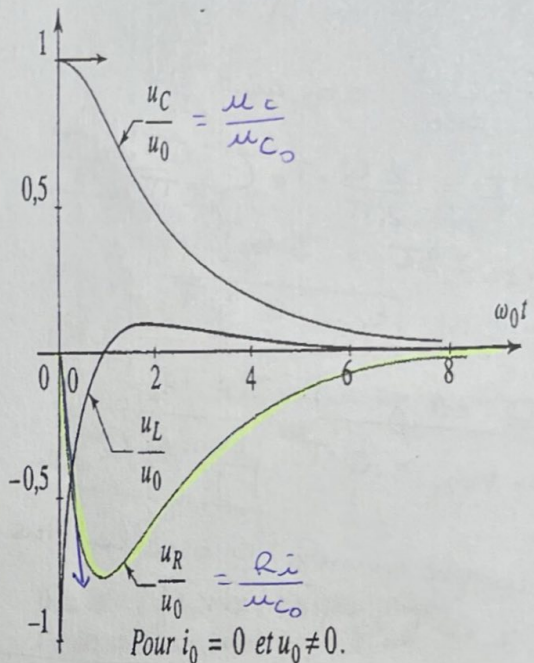
$\boxed{A = \frac{-u_{C0} r_2}{r_1 - r_2}}$

Racines données p3 $r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

Rq 2 : si $r_1 << r_2$: $u_c(t) \simeq Be^{r_2 t}$

$\tau_2 = -\frac{1}{r_2}$ $u_c(t) = Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$

$u_c(t) \simeq 0$ au bout de $5\tau_2$

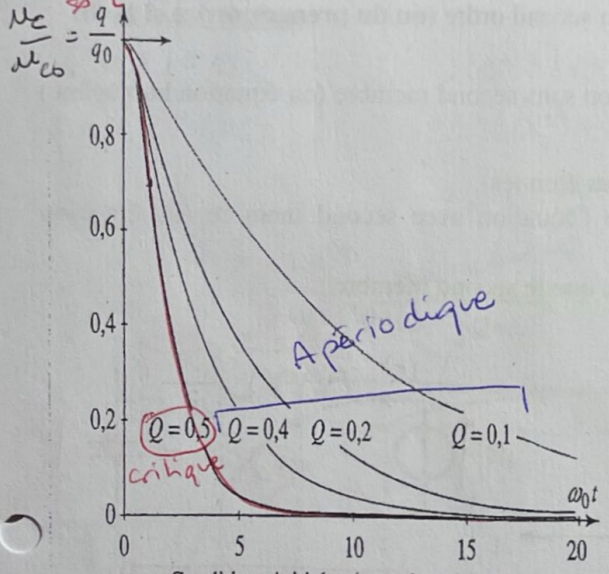


Pour $i_0 = 0$ et $u_0 \neq 0$.

Doc. 15. d.d.p. *aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques* $Q = 0{,}4 < \frac{1}{2}$

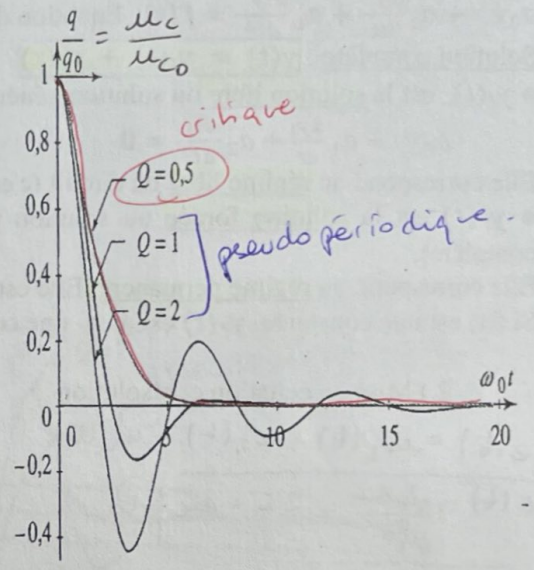
c) $\Delta = 0$: Régime critique — 1 solution double réelle r_0 — $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{\lambda = \omega_0}$ ou $\boxed{R = R_C}$

$\boxed{u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t}}$ — A, B constantes réelles.



Conditions initiales ($q_0 \neq 0$, $i_0 = 0$).

Doc. 14. *Régimes apériodique ($Q < 0,5$) et critique ($Q = 0,5$).*



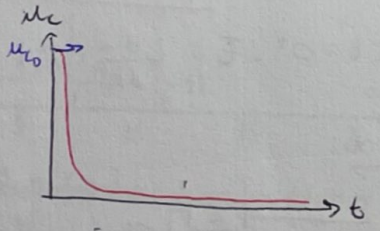
Doc. 20. *Régimes pseudo-périodique et critique. Condensateur initialement chargé $i(0) = 0$.*

$u_c(0^+) = u_{c0}$

$\frac{du_c}{dt}(0^+) = 0$

$u_c \to 0$

$t \to +\infty$

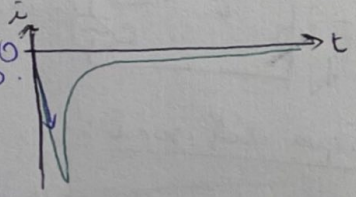


$i(0^+) = 0$

$\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{u_{c0}}{L} < 0$.

$i \to 0$

$t \to +\infty$



Rq : $i_c(t) = (At+B)e^{-\lambda t} = f(t) \cdot g(t)$

$f(t) = At + B$ $\quad f'(t) = A$

$g(t) = e^{-\lambda t}$ $\quad g'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$

$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(t) = (fg)' = f'g + fg'$

$= Ae^{-\lambda t} - \lambda(At+B)e^{-\lambda t}$

$u_c(0^+) = \boxed{B = u_{c0}}$

$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(0^+) = A - \lambda B = 0$

$\Rightarrow \boxed{A = \lambda u_{c0}}$

Rq 2 : Le régime critique est le régime qui tend le plus rapidement vers 0.

II Réponse à un échelon de tension

1.) Les équations différentielles

Généralisation : Commande f(t) Réponse y(t)

$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_1 \frac{d^2y}{dt^2} = f(t)$ Equation différentielle du second ordre (**ou du premier ordre si a_2=0**)

Solution complète : $\boxed{y(t) = y_l(t) + y_f(t)}$

- $y_l(t)$ est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

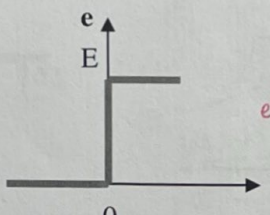
$$a_0 y_f + a_1 \frac{dy_l}{dt} + a_2 \frac{d^2y_l}{dt^2} = 0$$

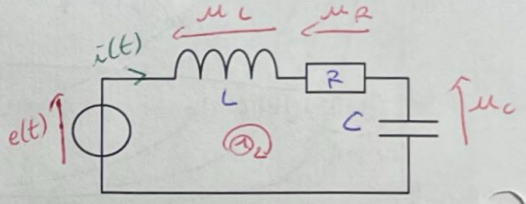
Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes).

- $y_f(t)$ est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète).

Elle correspond au régime permanent. Elle est du même type que le second membre :
Si f(t) est une constante, $y_f(t)$ est aussi une constante.

2.) Mise en équation et résolution





① $e(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_C(t)$

$\Rightarrow \boxed{e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + u_C}$ (1')

Or $i = C\frac{du_C}{dt}$

$\Rightarrow LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = e(t)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}e(t)}$

Pour $t>0$ $e = E$,

$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}E$

identique au I — $\frac{1}{LC}E$: second membre.

$\Rightarrow u_C(t) = u_{Ce}(t) + u_{Cf}$

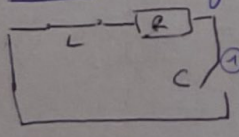
u_{Ce} identique à I ; u_{Cf} du même type que le 2nd membre donc cste.

$\frac{d^2u_{Cf}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_{Cf}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{Cf} = \frac{1}{LC}E$

$=0$ $=0$

$\Rightarrow \boxed{u_{Cf} = E}$

à $t=0^-$: Régime permanent continu



$i(0^-) = 0$ et $u_L(0^-) = 0$

① $\Rightarrow u_C(0^-) = 0$

à $t=0^+$: par continuité de l'énergie :

$\boxed{i(0^+) = 0 \text{ et } u_C(0^+) = 0}$

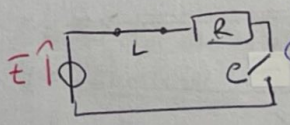
$i = C\frac{du_C}{dt} \rightarrow \boxed{\left(\frac{du_C}{dt}\right)(0^+) = 0}$

① à $t=0^+$: $E = L\frac{di}{dt}(0^+) \Rightarrow \boxed{\left(\frac{di}{dt}\right)(0^+) = \frac{E}{L}}$

à $t\infty$:

$i(\infty) = 0$

① $\Rightarrow u_C(\infty) = E$.



Equa diff sur i :

(1') $L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = E$

On dérive :

$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$

Or $\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C} \Rightarrow L\frac{d^2i}{dt} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0}$

même equa diff qu'au I.

$\Rightarrow$ mêmes solutions avec les CI ≠

I : ss générateur.

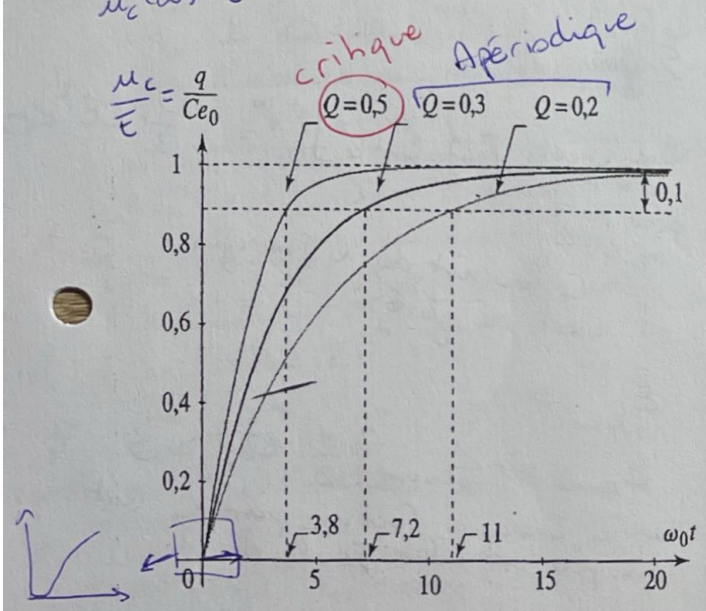
$\Delta < 0 \quad u_C(t) = Ae^{-\lambda t}cos(\Omega t + \varphi) + E = e^{-\lambda t}[acos(\Omega t) + bsin(\Omega t)] + E$
$\Delta > 0 \quad u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + E$
$\Delta = 0 \quad u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t} + E$

3.) Les résultats

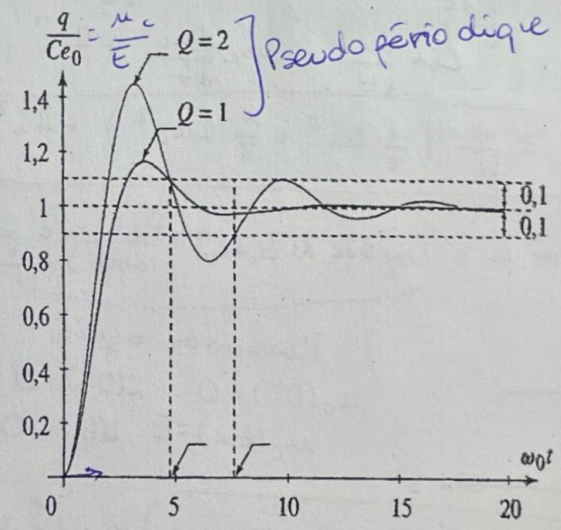
$u_c(0^+) = 0$ $\quad i(0^+) = 0$

$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(0^+) = 0$ $\quad \left(\frac{di}{dt}\right)(0^+) = \frac{E}{L}$

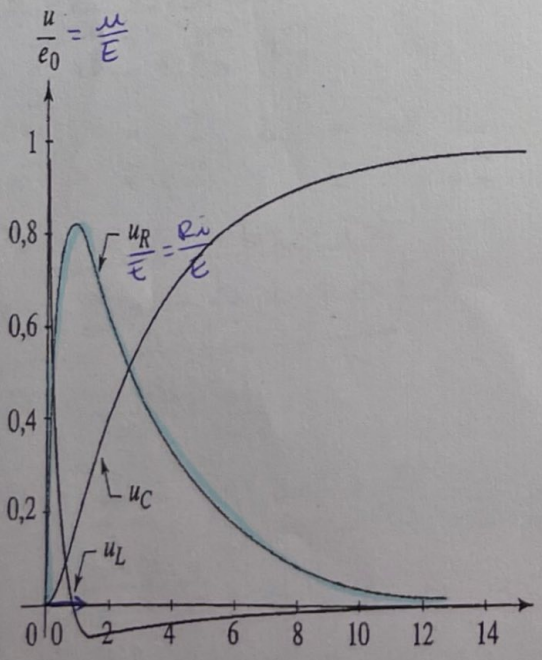
$u_c(\infty) = E$ $\quad i(\infty) = 0$



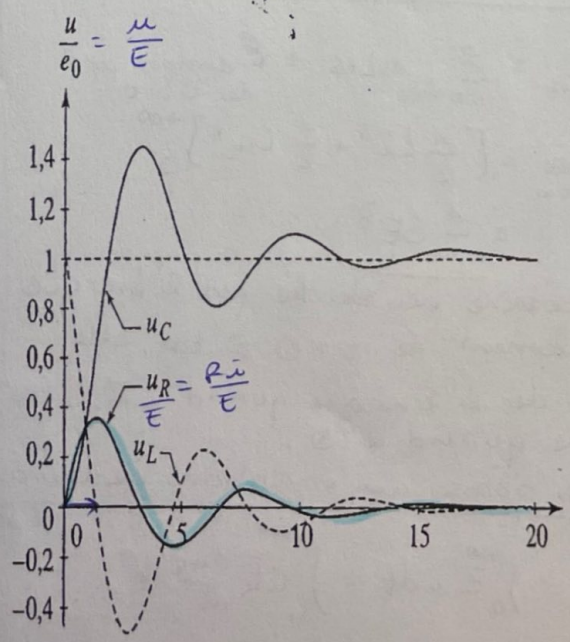
Doc. 35a. *Réponse à un échelon de tension. Régimes apériodiques.*



Doc. 36a. *Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-périodiques.*

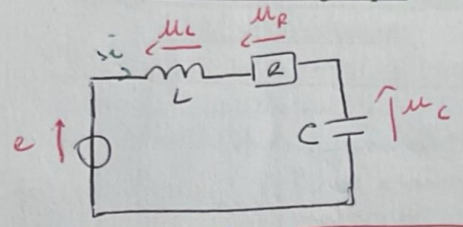


Doc. 35c. *Réponse à un échelon de tension. $Q = 0,3$.*



Doc. 36c. *Réponse à un échelon de tension. $Q = 2$.*

4.) Bilan énergétique



éq de maille : $e = u_L + u_R + u_C$ ①
CVG CVR

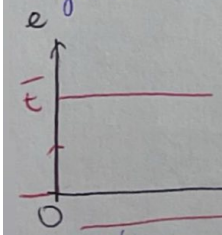
① × i : $ei = u_L i + u_R i + u_C i$

$u_L = L\frac{di}{dt}$ $u_R = Ri$ $i = C\frac{du_C}{dt}$

$\Rightarrow ei = Li\frac{di}{dt} + Cu_C\frac{du_C}{dt} + Ri^2$

② $\boxed{ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right) + Ri^2}$

$P_{\text{fournie par le gén}} = P_{\text{stockée ds [L+C]}} + P_{\text{dissipée par effet Joule}}$.



Puissances reçues.
$u_C(0^+) = 0$ $i(0^+) = 0$
$u_C(t\infty) = E$ $i(t\infty) = 0$

③ $\boxed{\int_0^t ei\,dt = \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right)dt + \int_0^t Ri^2 dt}$

$\mathcal{E}_{\text{géné } 0\to t} = \mathcal{E}_{\text{stockée ds L+C}} + \mathcal{E}_{\text{dissipée par R de 0 à t}}$

$\mathcal{E}_{\text{stockée } 0\to t\infty} = \left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right]_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{2}CE^2$

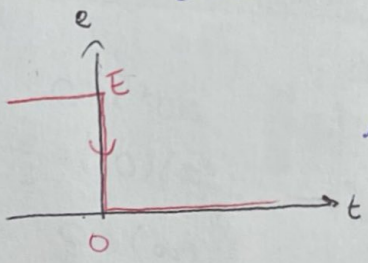
La bobine ne stocke pas l'énergie globalement de $t = 0$ à $t\infty$, elle stocke de l'énergie quand $i\nearrow$, la redonne quand $i\searrow$.
→ s'oppose aux variations de courant

$\mathcal{E}_{\text{géné } 0\to+\infty} = \int_0^{+\infty} E\,i\,dt = \int_0^{+\infty} CE\frac{du_C}{dt}dt$

$= CE\left[u_C\right]_0^{+\infty}$

$= CE^2$

$\mathcal{E}_{R\ 0\to+\infty} = \mathcal{E}_{\text{géné } 0\to+\infty} - \mathcal{E}_{L+C\ 0\to+\infty} = \frac{1}{2}CE^2$



$u_C(0^+) = E\ (= u_{C0})$
$u_C(t\infty) = 0$
$i(0^+) = 0$
$i(t\infty) = 0$

$\mathcal{E}_{\text{géné } 0\to+\infty} = \int_0^{+\infty} ei\,dt = 0$

$\mathcal{E}_{C\ 0\to+\infty} = \left[\frac{1}{2}Cu_C^2\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}CE^2 < 0$

reçue par C en CVR
⇒ C fournit de l'énergie.
C'est de géné.

$\mathcal{E}_{L\ 0\to+\infty} = 0$

$\mathcal{E}_{R\ 0\to+\infty} = -\mathcal{E}_{C\ 0\to+\infty} = \frac{1}{2}CE^2 > 0$.

Tte l'énergie fournie par C est dissipée par effet Joule ds R.

III Oscillateur amorti avec frottement visqueux

1.) Mise en équation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

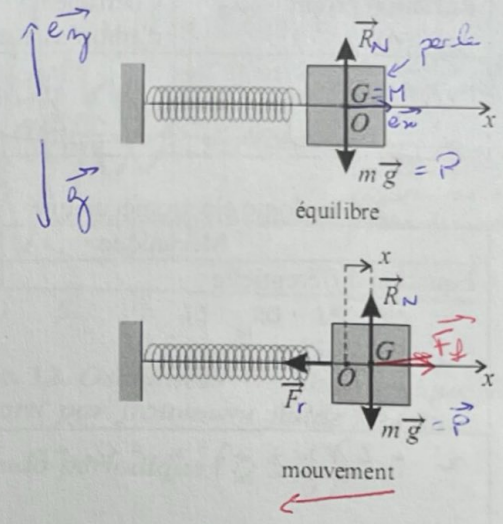
$\vec{F_f} = -\alpha \vec{v}$ $\alpha > 0$

α coeff de frottement. fluide.

Perle qui coulisse sur une tige horizontale sans frottements solides

Syst $\{M(m)\}$ Perle assimilée à un point matériel

Référentiel: terrestre galiléen.



Forces :
- $\vec{P} = m\vec{g}$ poids $\vec{P} = -mg\vec{e_y}$
- $\vec{R_N} \perp$ axe réaction normale à l'axe en l'absence de frottements solides.
- $\vec{F_R} = -k(l - l_0)\vec{e_x}$

où $\vec{e_x}$ ds le sens de l'étirement $\|\vec{e_x}\| = 1$ vecteur unitaire.

⚠ $\vec{e_x}$ ou $\vec{u_x}$ vecteurs unitaires

$\vec{F_f} = -\alpha \vec{v}$

À l'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_r} = \vec{0}$ $(\vec{v} = \vec{0})$

- proj sur (Ox) : $-k(l_{eq} - l_0) = 0$

$\Leftrightarrow$ $l_{eq} = l_0$

- proj sur (Oy) : $R_N - mg = 0 \Rightarrow R_N = mg$

Loi fondamentale de la dynamique (2e loi de Newton) :

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_r} + \vec{F_f}$

$\vec{OM} = x\vec{e_x}$ où $x = l - l_0$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x}$ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x}$.

Sur (Ox) : $m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$

$\Rightarrow$ $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (1)

Rq : $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \times \frac{\omega_0}{\omega_0}$

$= \frac{m\omega_0^2}{\alpha\omega_0}$ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$= \frac{m}{\alpha\omega_0} \times \frac{k}{m}$

$Q = \frac{k}{\alpha\omega_0}$

(1) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ Formes canoniques : (a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ ou (b) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

Pulsation propre ω_0 en rad.s^{-1}	Coefficient d'amortissement λ en s^{-1}	Facteur de qualité Q ss dimens°
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$	$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$	$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$ $\Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{m}{\alpha\omega_0} \times \frac{k}{m} = \frac{k}{\alpha\omega_0} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

entre (1) et (a) ; entre (1) et (b) ; (2)

2.) Analogie électromécanique

Mécanique	Electricité
Equation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ où $q = Cu_c$
$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ou $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	
Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$	$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R}$
Elongation : x	→ q charge du condensateur
Vitesse : $\dot{x}$	→ $i = \frac{dq}{dt}$ intensité
Masse : m	→ inductance L
Coefficient de frottement fluide : α	→ R résistance
Raideur du ressort : k	→ $\frac{1}{C}$ où C capacité du condensateur
Energie mécanique : $E_m = E_c + E_{pe}$ $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ (à texte près, choisie nulle)	→ énergie stockée dans L+C. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_c^2$ $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ (où $q = Cu_c$)

3.) Solutions ef I2 à refaire.

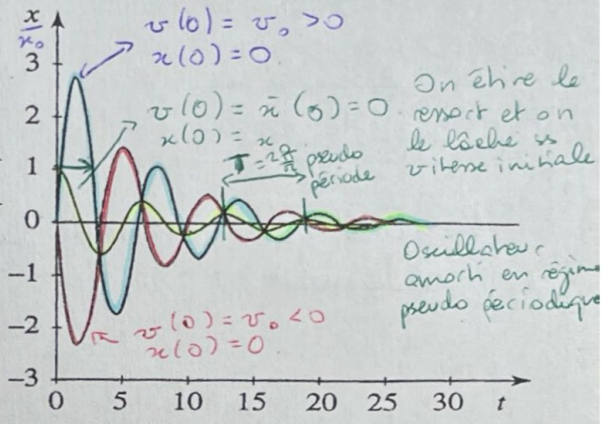
a) Régime pseudo-périodique

$\Delta<0$	$\lambda<\omega_0$	ou	$Q>\frac{1}{2}$

$\lambda = |Re(r)| > 0$
$\Omega = |Im(r)| > 0$

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t+\varphi) = e^{-\lambda t}[a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)]$$

Rq : si $\alpha = 0$ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Oscillateur harmonique
$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$
$= a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$ cf S2 3.
$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ période propre.

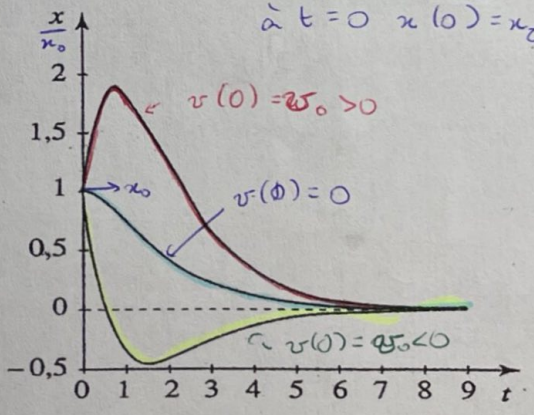


Doc. 12. *Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime pseudo-périodique* $\left(Q>\frac{1}{2}\right)$.

b) Régime apériodique

$\Delta>0$	$\lambda>\omega_0$	ou	$Q<\frac{1}{2}$

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$



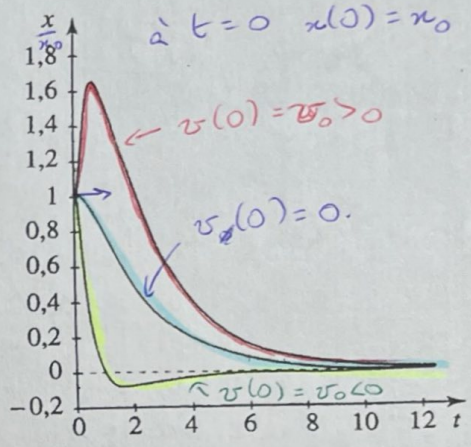
Doc. 17. *Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime apériodique* $\left(Q<\frac{1}{2}\right)$ *suivant les conditions initiales, l'élongation passe par un extremum ou tend uniformément vers zéro.*

c) Régime critique

$\Delta=0$	$\lambda = \omega_0$	ou	$Q = \frac{1}{2}$

$x(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$

Régime qui s'amortit le ⊕ rapidement.



Doc. 15. *Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime critique* $\left(Q = \frac{1}{2}\right)$. *Les conditions initiales sont les mêmes que celles du mouvement pseudo-périodique (doc. 12). Dans tous les cas, le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement.*

4.) Bilan énergétique

LFD ① $m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$

$\rightsquigarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

$\times \dot{x} \Rightarrow 0 = m\dot{x}\ddot{x} + \alpha\dot{x}^2 + kx\dot{x}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \alpha\dot{x}^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = 0$

Rq $(x^2)' = 2x\frac{dx}{dt}$ où $x(t)$

$= 2x\dot{x}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -\alpha v^2 < 0}$

où $\dot{x} = v = \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} < 0$ $E_m \searrow$.

où $E_m = E_c + E_{pe} + cste$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$

$(E_{pp} = +mgz = cste)$

Il y a dissipation d'énergie sous forme de chaleur, à cause des frottements.