# Signaux Electriques SE5 Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

I Le régime sinusoïdal forcé ..... 2
1.) Exemple : Circuit RLC série ..... 2
2.) Méthode de résolution ..... 2
3.) Représentation d'une grandeur sinusoïdale ..... 3
II Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé ..... 4
1.) Position du problème ..... 4
2.) Impédances et admittances ..... 4
III Le circuit RLC série. Etude de l'intensité ..... 7
IV Le circuit RLC série. Etude de la tension aux bornes du condensateur ..... 9
V L'oscillateur harmonique amorti ..... 11

## Millennium Bridge (Londres) *https://fr.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge_(Londres)*



Le pont a été inauguré le 10 juin 2000, avec deux mois de retard et un supplément de 2,2 millions de livres sur un budget initial de 18,2 millions de livres. Cependant il a dû être fermé au public deux jours plus tard, en raison d'un phénomène de résonance, le pont oscillant latéralement de façon imprévue. Ce jour-là, une marche caritative devant traverser le pont attira beaucoup de monde. Les mouvements de balancement furent provoqués par le grand nombre de piétons (90 000 personnes le premier jour avec jusqu'à 2 000 personnes en même temps sur le pont). Les premières vibrations encourageaient et parfois obligeaient les piétons à marcher au rythme du balancement, ce qui accentua les oscillations, même en début de journée lorsque le pont était relativement peu chargé.

Ce mouvement de balancement lui a valu le surnom de *Wobbly Bridge* (pont bancal). Les mesures prises pour limiter le nombre de personnes traversant le pont ont entraîné de longues files d'attente, mais n'ont atténué ni l'enthousiasme du public pour ce *manège qui décoiffe*, ni les vibrations elles-mêmes. La fermeture du pont après seulement trois jours d'ouverture a été sévèrement critiquée par le public, qui associait ce retard à celui dont avait souffert le Dôme du Millenium.

Les phénomènes de résonance des ponts suspendus avaient été bien étudiés depuis la catastrophe du pont du détroit de Tacoma (Washington, États-Unis). Néanmoins peu d'attention avait été prêtée au mouvement latéral produit par des piétons, provoqué par la réaction humaine à des petits mouvements latéraux dans le pont, entraînant un mouvement de pulsion qui n'avait pas été anticipé dans l'analyse statistique avant la construction. On a pensé que le profil exceptionnellement bas des câbles de suspension a contribué au problème, mais une étude menée par des ingénieurs prouve que l'oscillation peut se produire sur n'importe quel pont à suspension ou autre, soumis à un grand mouvement de foule.

Le problème a été résolu par l'installation d'amortisseurs hydrauliques et de masse pour contrôler les oscillations horizontales et latérales. Les travaux ont été menés de mai 2001 à janvier 2002. Après une période d'essai, le pont a été rouvert au public le février 2002 ; depuis, aucune vibration importante n'a été signalée.

## Pont du détroit de Tacoma (1940) *https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_d%C3%A9troit_de_Tacoma_(1940)*

Le **pont du détroit de Tacoma** ou **pont de Tacoma**, est un pont suspendu qui reliait les villes de Tacoma et de Gig Harbor dans l'État de Washington. Inauguré le 1er juillet 1940, il s'effondre le 7 novembre 1940 lors d'un des plus célèbres accidents de génie civil, sans avoir fait toutefois de victimes.

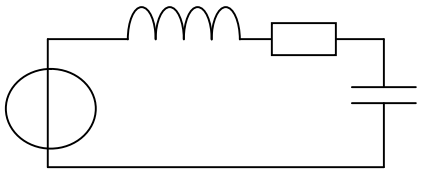
Lors de la rupture de l'ouvrage, la vitesse du vent était d'environ 65 km/h. Des oscillations de grande amplitude en torsion sont apparues à 10 h, menant à l'effondrement du pont à 11 h 10. Le pont avait été dimensionné pour résister au vent, mais en ne tenant compte que des effets statiques[1]. En raison du couplage aéroélastique, un échange d'énergie mécanique se produit entre le vent et le pont qui oscille. On dit que le pont est stable lorsque l'énergie mécanique est transférée du pont vers le vent qui la dissipe. Lorsqu'un événement extérieur engendre une petite oscillation initiale, par exemple le passage d'un camion ou une rafale de vent, alors cette oscillation va s'amortir. De plus, le vent n'est jamais parfaitement constant : les petites variations de vitesse autour de la vitesse moyenne suffisent à produire de petites oscillations. Mais si la vitesse moyenne du vent est suffisamment élevée, au-dessus de ce que l'on appelle la « vitesse critique », le pont est instable, et l'oscillation initiale s'amplifie. L'énergie se transfère alors du vent vers le pont, et les oscillations s'amplifient en raison du couplage aéroélastique, jusqu'à la ruine. Ce mécanisme n'était connu en 1940 que pour les structures d'avions (ailes, fuselage, empennage…), personne n'avait alors envisagé ce scénario pour des ponts suspendus[3].

Pont de la Maine Angers : *https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_de_la_Basse-Chaîne#La_catastrophe_de_1850*

# I Le régime sinusoïdal forcé

## 1.) Exemple : Circuit RLC série

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Filtres/filtre.php



## 2.) Méthode de résolution

On considère un système linéaire, soumis à une excitation sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$

La réponse s(t) est donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = f(t)$$

où f(t) est une fonction connue de l'excitation e(t) et de ses dérivées temporelles : $f(t) = Fm \cos(\omega t + \varphi_f)$

La solution de l'équation est $\boxed{s(t) = s_\ell(t) + s_f(t)}$

- $s_\ell(t)$ est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$$

Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes). Elle s'amortit au bout de quelques temps**. On ne s'y intéressera pas dans la suite de ce chapitre.**

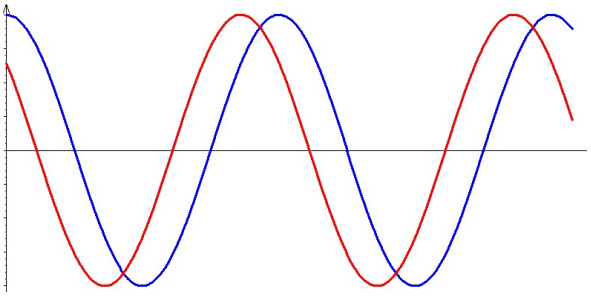
● $s_f(t)$ est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète) Elle correspond au régime permanent.
Elle est du même type que le second membre : **c'est donc une fonction sinusoïdale, de même pulsation que e(t), indépendante des conditions initiales.** $s_f(t) = Sm \cos(\omega t+\varphi_s)$
$s_f$ correspond au régime sinusoïdal forcé. $\varphi_s$ est l'avance de phase de s par rapport à e.

En régime sinusoïdal, toutes les grandeurs étudiées sont sinusoïdales de même pulsation que l'excitation.

## 3.) Représentation d'une grandeur sinusoïdale

### a) Représentation temporelle

Grandeur sinusoïdale : $g(t) = Gm \cos(\omega t+\varphi)$



Amplitude Gm
Valeur crête à crête (ou pic à pic) Gcc = 2 Gm
Valeur efficace (en régime sinusoïdal) $G_{eff} = \frac{G_m}{\sqrt{2}}$
Pulsation (en rad.s$^{-1}$) ω
Période $T = \frac{2\Pi}{\omega}$ Fréquence $f = \frac{1}{T}$
Phase instantanée ωt+φ Avance de phase à l'origine φ

### b) Représentation complexe

$j^2 = -1$ et $j = \exp(j\pi/2)$

La représentation complexe de $g(t) = Gm\cos(\omega t+\varphi)$ est la fonction complexe

$$\underline{g}(t) = G_m e^{j(\omega t+\varphi)} = G_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{G_m} e^{j\omega t}$$

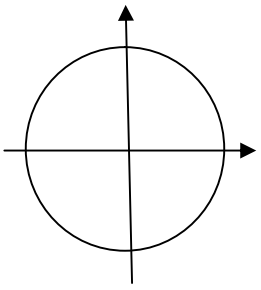
où $\underline{G_m} = G_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe de $\underline{g}(t)$. Elle est indépendante du temps.

$$\underline{g}(t) = Gm[\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)] \qquad g(t) = Re(\underline{g}(t))$$

Module de $\underline{G_m}$ : $|\underline{G_m}| = G_m$ est l'amplitude de $g(t)$

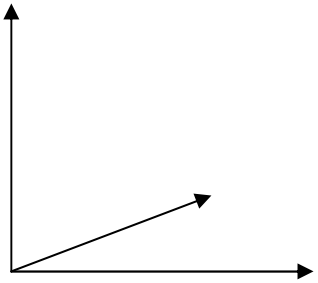
Argument de $\underline{G_m}$ : $\arg(\underline{G_m}) = \varphi$ est l'avance de phase à l'origine de $g(t)$.

Dériver une fonction complexe sinusoïdale revient à la multiplier par jω
Intégrer une fonction complexe sinusoïdale revient à la diviser par jω



Somme de deux fonctions de même pulsation

La notation complexe d'un signal peut-être utilisée lorsqu'on effectue des opérations linéaires. Elle n'est pas valable pour un produit.



Remarque : Représentation de Fresnel

## II Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

### 1.) Position du problème

- on considère un dipôle linéaire, constitué de dipôles R, L et C en série ou en parallèle.
- on l'alimente par un générateur délivrant une excitation sinusoïdale (tension ou courant): $e(t) = E_m \cos(\omega t)$

Hypothèses : Régime quasi-stationnaire

$i(t) = I_m \cos(\omega t+\varphi_i) \rightsquigarrow \underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t+\varphi_i)} = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}$

$\underline{i}(t) = \underline{I_m} e^{j\omega t}$ où $\underline{I_m} = I_m e^{j\varphi_i}$ est l'amplitude complexe

$u(t) = U_m \cos(\omega t+\varphi_u) \rightsquigarrow \underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t+\varphi_u)} = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$

$\underline{u}(t) = \underline{U_m} e^{j\omega t}$ où $\underline{U_m} = U_m e^{j\varphi_u}$ est l'amplitude complexe

Lois de Kirchhoff Ce sont des expressions linéaires faisant intervenir i et u.
On admet que les lois de Kirchhoff s'écrivent de la même façon en utilisant la notation complexe.

Loi des nœuds : $\sum_k \varepsilon_k \underline{i_k}(t) = 0$ ou $\sum_k \varepsilon_k \underline{I_{km}} = 0$ où $\varepsilon_k = +1$ si $i_k$ se dirige vers le nœud, $\varepsilon_k = -1$ sinon

Loi des mailles : $\sum_k \varepsilon_k \underline{u_k}(t) = 0$ ou $\sum_k \varepsilon_k \underline{U_{km}} = 0$ où $\varepsilon_k = +1$ si $u_k$ est dans le sens de la maille, $\varepsilon_k = -1$ sinon

### 2.) Impédances et admittances

a) Définitions

Hypothèses : Dipôle linéaire passif en convention récepteur

Impédance complexe du dipôle $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U_m}}{\underline{I_m}} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$

Impédance du dipôle : $Z(\omega) = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m}$

Avance de phase de u par rapport à i : $\varphi(\omega) = \arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$

$\underline{Z} = R(\omega) + jX(\omega)$ $\quad |\underline{Z}| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$

Résistance du dipôle : $R(\omega) = \Re e(\underline{Z})$ Réactance du dipôle : $X(\omega) = \Im m(\underline{Z})$

Admittance complexe du dipôle $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{I_m}}{\underline{Um}} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$

Admittance du dipôle : $Y(\omega) = |\underline{Y}| = \frac{I_m}{U_m} = \frac{1}{Z(\omega)}$

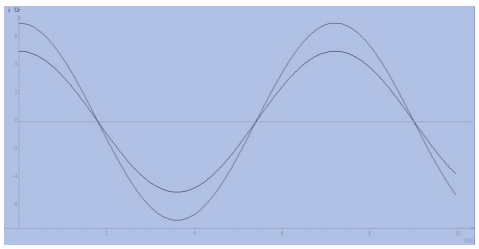
Avance de phase de i par rapport à u : $\varphi_{\underline{Y}} = \arg(\underline{Y}) = \varphi_i - \varphi_u$

$\underline{Y} = G(\omega) + jB(\omega)$ $\quad |\underline{Y}| = \sqrt{G^2(\omega) + B^2(\omega)}$

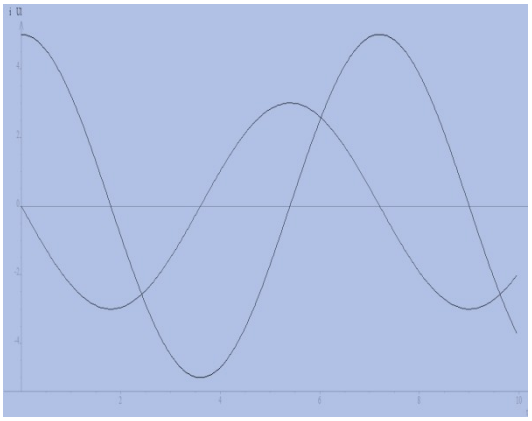
Conductance du dipôle : $G(\omega) = \Re e(\underline{Y})$ Susceptance du dipôle : $B(\omega) = \Im m(\underline{Y})$

b) Impédance de quelques dipôles :

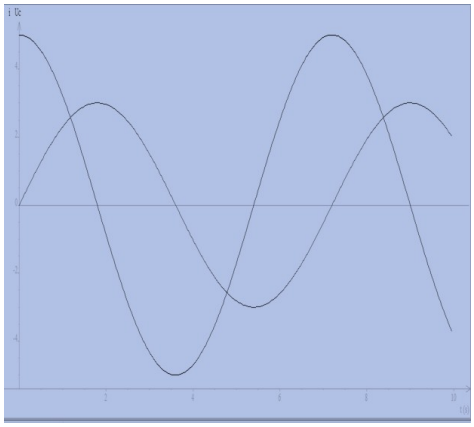
Conducteur ohmique :



Bobine idéale d'inductance L

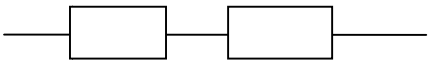


Condensateur idéal de capacité C :

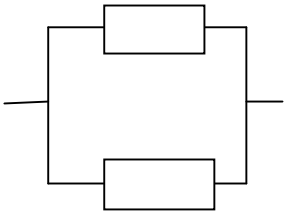


c) Association de  dipôles :

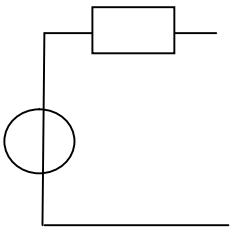
- en série :

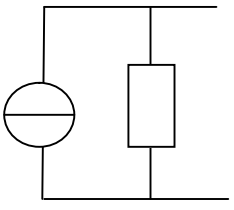


- en parallèle :



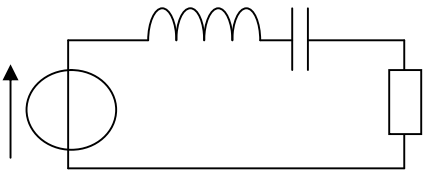
d) Générateur :

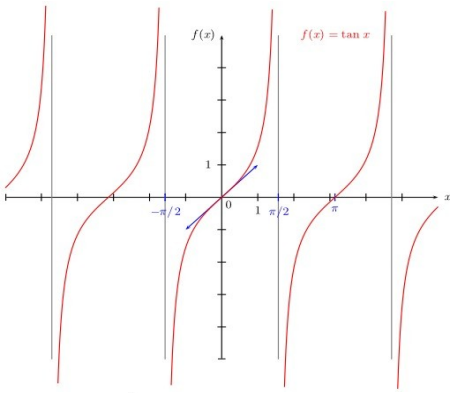


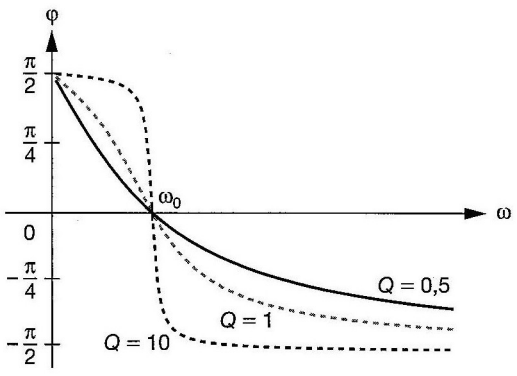


## III Le circuit RLC série. Etude de l'intensité

### 1.) Notation complexe





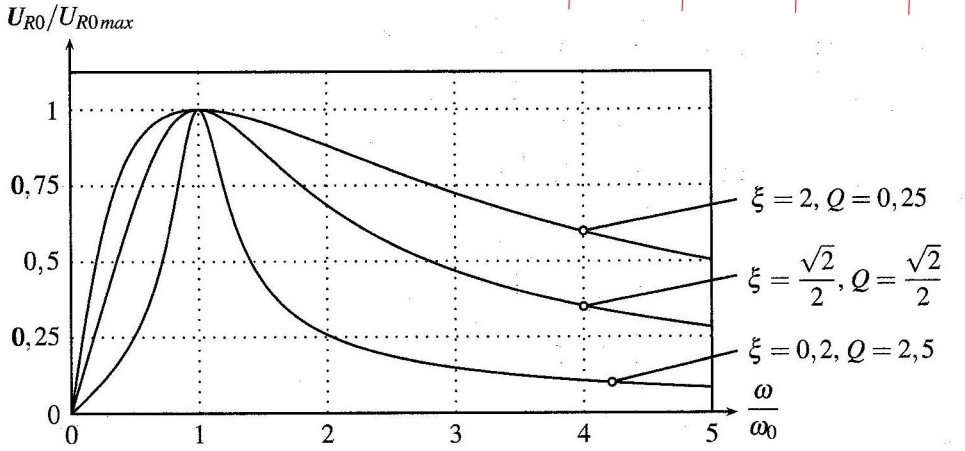




**Figure 10.17 –** Rapports de l'amplitude de $u_R$ à sa valeur maximale ($R$ variable).

## IV Le circuit RLC série. Etude de la tension aux bornes du condensateur

### 1.) Notation complexe

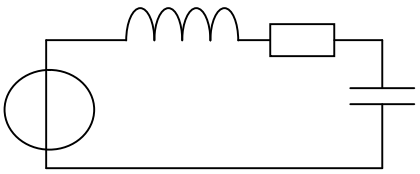
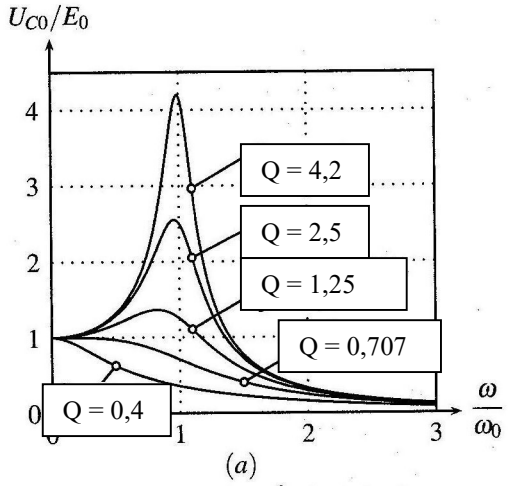
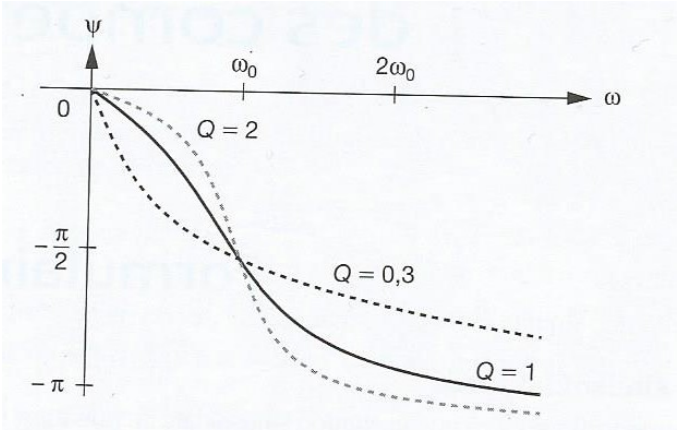


**Figure 10.19** – Étude de la résonance aux bornes du condensateur

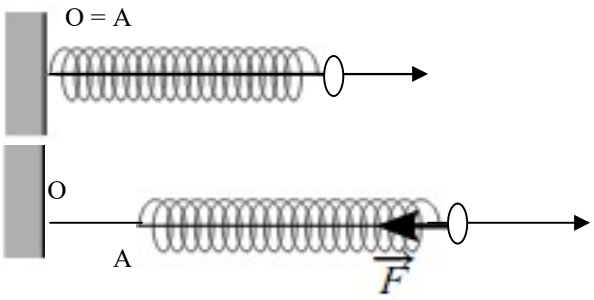


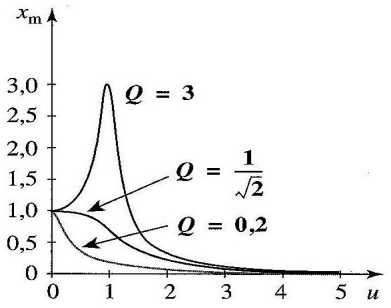



## V L'oscillateur harmonique amorti

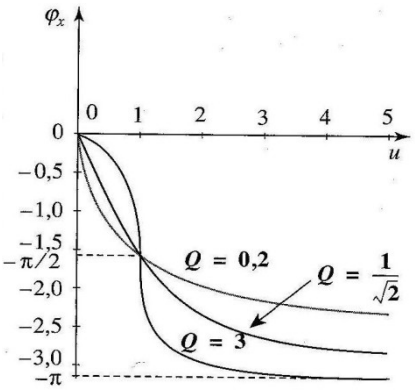
### 1) Equation du mouvement

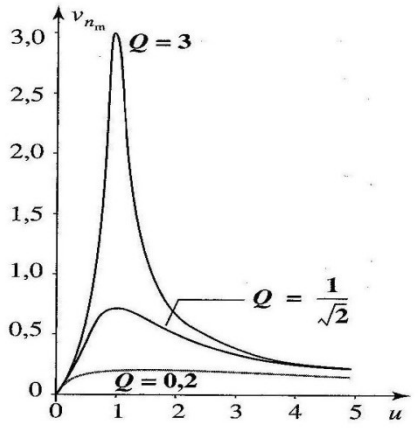
https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php






**Doc. 8.** *Variation de l'amplitude normalisée* $x_{n_m} = \frac{x_m}{x_{A_m}}$ *de la réponse en élongation en fonction de* $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ *pulsation normalisée de l'excitation pour différents amortissements.*




**Doc. 12.** *Variation de l'amplitude :* $v_{n_m} = \frac{v_m}{\omega_0 x_{A_m}}$ *de la réponse en vitesse en fonction de la pulsation normalisée* $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ *de l'excitation.*

