Chapitre 1 : Fonctions usuelles(première partie)

Quantificateurs qui seront utilisés :

$\forall$ pour "quel que soit" $\exists$ pour "il existe" $\exists!$ pour "il existe un unique"

Tableau des lettres grecques

alpha	α	
beta	β	
chi	χ	
delta	δ	Δ
epsilon	ϵ	
phi	ϕ ou φ	Φ
gamma	γ	Γ
eta	η	

iota	ι	
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mu	μ	
nu	ν	
pi	π ou ϖ	Π
theta	θ ou ϑ	Θ
rho	ρ	

sigma	σ ou ς	Σ
tau	τ	
upsilon	υ	Υ
omega	ω	Ω
xi	ξ	Ξ
psi	ψ	Ψ
zeta	ζ	

1.1 Équations et inéquations algébriques d'ordre 1 ou 2

Équations :

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. L'équation $ax+b=0$ d'inconnue x réel admet une solution unique $x = -\frac{b}{a}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}^*$, et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$. Pour résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac$.
  — si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  — si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine double $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
  — si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de racine réelle.

Inéquations :

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ alors :
  — si $a > 0$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax+b>0$ est l'intervalle $]-\frac{b}{a}, +\infty[$.
  — si $a < 0$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax+b>0$ est l'intervalle $]-\infty, -\frac{b}{a}[$.
- Soit $a \in \mathbb{R}^*$, et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre une inéquation du type $ax^2+bx+c>0$ revient à trouver le signe du polynôme $P(x) = a^2+bx+c$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ et les racines x_1 et x_2 de l'équation $P(x)=0$.
  — si $\Delta > 0$ alors $P(x)$ est du signe de a lorsque x est à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe opposé à l'intérieur des racines. Il peut être pratique de faire un tableau de signes dans ce cas.
  — si $\Delta \leqslant 0$ alors $P(x)$ est du signe de a (et $P(x)$ est éventuellement nul si x est une racine double de P).

1.2 Fonctions usuelles (première partie)

1.2.1. Plan général d'une étude de fonction

Lorsqu'on étudiera une fonction f, on adoptera en général le plan suivant :

— recherche du domaine de définition (ou de l'ensemble de définition), noté par exemple D_f.
— Calcul de la dérivée, recherche de son signe (résoudre $f'(x) > 0$ et pas seulement $f'(x) = 0$).
— Tableau de variation (avec éventuellement les limites aux bords)
— Tracé du graphe Γ de f.

Rappels sur la dérivation

- Si f est dérivable en a, alors la tangente à Γ au point $A(a, f(a))$ est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$
- Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g fonctions dérivables : $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \,, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \text{ si } g \neq 0$$

1. 2. 2. Fonction exponentielle

On admet qu'il existe une et une seule fonction vérifiant les critères imposés dans la définition suivante :

Définition 1 :

La fonction exponentielle, notée exp, *est l'unique fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\exp(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \; \exp'(x) = \exp(x)$$

Habituellement, on note $\exp(x) = e^x$.

Propriété 1 :

Pour toute fonction u *dérivable* $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

Propriété 2 :

Pour tous réels a, b, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *et pour tout* n *entier relatif :*

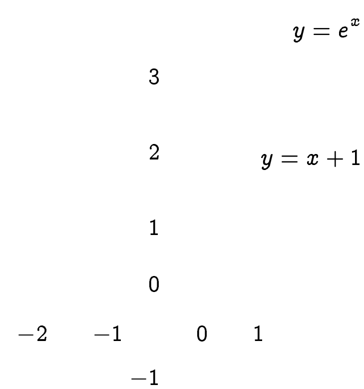
- $e^{a+b} = e^a . e^b$ • $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ • $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $\exp(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \exp(a_1) \times \exp(a_2) \times \cdots \times \exp(a_n)$
- $\exp(n.a) = [\exp(a)]^n$

Conséquence : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

Propriété 3 :

- *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha . \exp(x) = 0$ *pour tout réel* $\alpha > 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
exp			$+\infty$
	0		



$e^x = 1 \iff x = 0$, $e^x > 1 \iff x > 0$

Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 0$ est : $y = f(a) + f'(a)(x - a) = x + 1$

Propriété 4 :

Pour tout réel x, *on a* $e^x \geqslant 1 + x$.

Démonstration : on dresse le tableau de variation de la fonction différence $\varphi : x \longmapsto e^x - 1 - x$ (à faire et savoir faire)

1. 2. 3. Fonctions logarithmes

1. 2. 3. 1. Logarithme népérien (John Neper (1550-1617))

On admet qu'il existe une et une seule fonction vérifiant les critères imposés dans la définition suivante :

Définition 2 :

La fonction logarithme népérien, notée ln, *est l'unique fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *telle que :*

$$\ln(1)=0 \text{ et } \forall x\in]0,+\infty[\,,\ \ln'(x)=\frac{1}{x}$$

On note aussi $\ln(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. C'est l'unique primitive de $x\longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en $x=1$.

remarque

Pour trouver le domaine de définition d'une fonction du type $\ln(u(x))$, il faut rechercher les réels x tels que $u(x)$ existe et est strictement positif.

Propriété 5 :

- ln *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et* $\forall x>0\,,\ \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$
- *Soit u une fonction dérivable à valeurs strictement positive :* $[\ln(u(x))]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Propriété 6 :

Pour tous réels $a,\ b,\ a_1,a_2,\dots,a_n$ *, strictement positifs et pour tout* n *entier relatif :*

- $\ln(a\,b)=\ln(a)+\ln(b)$ • $\ln(\frac{1}{a})=-\ln(a)$ • $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
- $\ln(a_1.a_2\dots.a_n)=\ln(a_1)+\ln(a_2)+\cdots+\ln(a_n)$
- $\ln(a^n)=n\,\ln(a)$

Propriété 7 :

- *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}=0$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^\alpha.\ln(x)=0$ *pour tout réel* $\alpha>0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	
ln	$-\infty$		$+\infty$

2 $y=x-1$

1 $y=\ln(x)$

0

0 1 2 3 4

-1

-2

Pour tout réel x strictement positif :
$\ln(x)=0\iff x=1$
$\ln(x)>0\iff x>1$

Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a=1$ est : $y=f(a)+f'(a)(x-a)=x-1$

Propriété 8 :

pour tout $x>0$ *et pour tout réel* y *on a* $y=\ln(x)\iff x=e^y$.
La fonction logarithme népérien est la bijection réciproque de l'exponentielle.

Propriété 9 :

Pour tout réel $x>-1$, *on a* $\ln(1+x)\leqslant x$.

Se démontre avec le tableau de variation de la fonction différence $\psi : x\longmapsto x-\ln(1+x)$ (à faire et savoir faire)

1.2.3.2. Logarithmes de base a, avec $a=2$ ou $a=10$

Définition 3 :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction logarithme de base a :

$$\log_a \;:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R};\; x \longmapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

2

$y = \log_2(x)$

1

0

0 1 2 3 4

-1

-2

2

1

$y = \log_{10}(x)$

0

0 1 2 3 4

-1

-2

Propriété 10 :

- *pour tout $x > 0$ et pour tout réel y on a $y = \log_{10}(x) \iff x = 10^y$.*
  La fonction logarithme décimale est la bijection réciproque de l'application $x \longmapsto 10^x$.
- *pour tout $x > 0$ et pour tout réel y on a $y = \log_2(x) \iff x = 2^y$.*
  La fonction logarithme binaire est la bijection réciproque de l'application $x \longmapsto 2^x$.

Toutes les propriétés des fonctions logarithmes de base a peuvent se déduire de ce qu'on sait déjà sur le logarithme népérien. par exemple :

Propriété 11 :

Pour tous réels x et y strictement positifs : $\log_a(x\,y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

1. 2. 4. Racine carrée

Définition 4 :

Pour tout réel x positif ou nul, on définit la racine carrée de x par $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \iff \begin{cases} x = y^2 \\ \text{et} \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

Propriété 12 :

- *Racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$,* $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- *Pour toute fonction u dérivable à valeur dans $]0,+\infty[$,* $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Propriété 13 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$ et, pour tout $x \geqslant 0$ on a $(\sqrt{x})^2 = x$.
Pour tous a, b positifs ou nuls, on a $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \iff a \leqslant b$

x	0		$+\infty$
$(\sqrt{x})'$		$+$	
$\sqrt{}$	0		$+\infty$

2

$y = \sqrt{x}$

1

0

0 1 2 3 4

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. La courbe présente à l'origine une demi-tangente verticale

1. 2. 5. Fonctions puissances

On sait que, par convention, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.

On sait que, pour tout réel x et pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $\quad x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois } x}$

On sait aussi que, pour tout réel $x \neq 0$ et pour tout entier relatif $n < 0$, on a : $\quad x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$

On peut étendre la définition de x^α au cas où $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ en utilisant les fonctions exponentielle et logarithme :

Définition 5 :

> *Pour tout réel a strictement positif et pour tout réel b , on pose :* $\quad a^b = e^{b\ln(a)} = \exp(b\ln(a))$

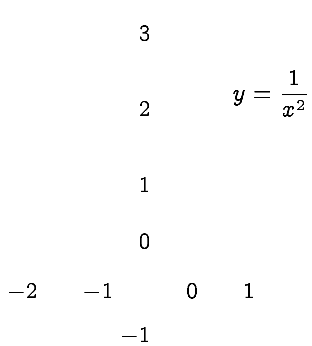
Le domaine de définition D vaut donc $D = \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, ou $D = \mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, ou $D =]0, +\infty[$ si $\alpha \in]0, +\infty[\setminus\mathbb{N}^*$

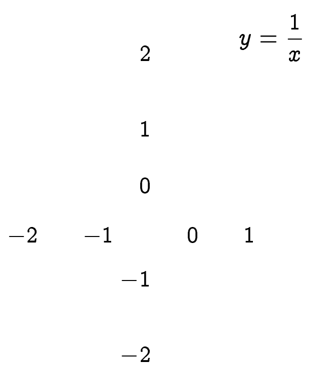
Propriété 14 :

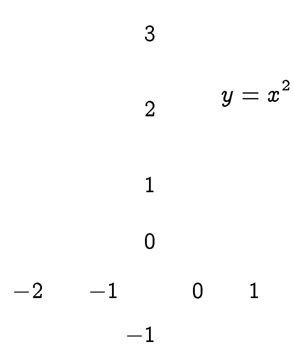
> *Quels que soient les réels α et β, et les réel x et y dans D, on a :*
> • $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta$ $\quad$ • $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$ $\quad$ • $(x^\alpha)^\beta = \left(x^\beta\right)^\alpha = x^{\alpha\,\beta}$ $\quad$ • $(x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$

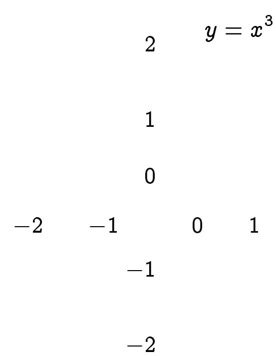
Propriété 15 :

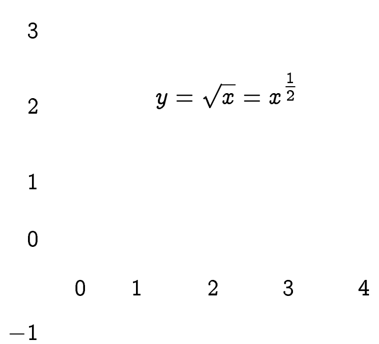
> - *Les fonctions puissances* : $x \longmapsto x^\alpha$ *sont dérivables sur D et :* $\quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
> - *Pour toute fonction dérivable u à valeurs dans D, on a* $\quad [u(x)^\alpha]' = \alpha\, u'(x)\, [u(x)]^{\alpha-1}$

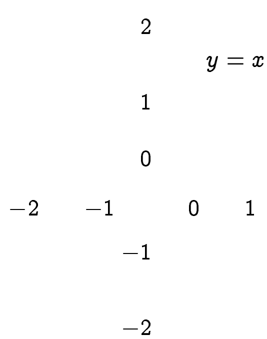


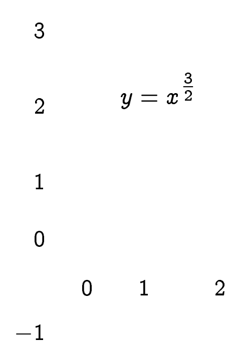












1. 3 Inégalités dans $\mathbb{R}$, valeur absolue

1. 3. 1. Ordre dans $\mathbb{R}$

Définition 1 :

> *La relation $\leqslant$ est dite relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car elle vérifie les critères suivants :*
> - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\; x \leqslant x$ $\quad$ *(la relation est dite réflexive)*
> - $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\; x \leqslant y$ *et* $y \leqslant x \Rightarrow x = y$ $\quad$ *(la relation est dite antisymétrique)*
> - $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\; x \leqslant y$ *et* $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ $\quad$ *(la relation est dite transitive)*

Propriété 1 :

Pour tous réels x, y, z, x', y' on a

- $x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad x+z \leqslant y+z.$
- $\left\{\begin{array}{c} x \leqslant y \\ et \\ x' \leqslant y' \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x+x' \leqslant y+y'.$
- $\left\{\begin{array}{c} x \leqslant y \\ et \\ 0 \leqslant z \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad xz \leqslant yz.$
- $x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad -y \leqslant -x$
- $0 < x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$

1.3.2. Parties majorées, minorées, bornées de $\mathbb{R}$, maximum, minimum

Définition 2 :

— *On appelle majorant d'une partie $A \subset \mathbb{R}$, tout réel M vérifiant : $\forall x \in A\,,\ \ x \leqslant M$*
— *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée si elle admet au moins un majorant.*
— *On appelle minorant d'une partie $A \subset \mathbb{R}$, tout réel m vérifiant : $\forall x \in A\,,\ \ x \geqslant M$*
— *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est minorée si elle admet au moins un minorant.*
— *On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée.*
— *On dit qu'un réel x est maximum d'une partie A de $\mathbb{R}$ si $x \in A$ et x est un majorant de A*
— *On dit qu'un réel x est minimum d'une partie A de $\mathbb{R}$ si $x \in A$ et x est un minorant de A*

Trouver une partie de $\mathbb{R}$ majorée qui n'admet pas de maximum.

1.3.3. Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 3 :

Pour tout réel x, on définit la valeur absolue de x par : $|x| = \left\{\begin{array}{ll} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{array}\right.$

Une autre définition possible est $|x| = \max(x, -x)$

Propriété 2 :

— $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ |x| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ |xy| = |x|.|y|$
— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$ *(appelée "inégalité triangulaire")*

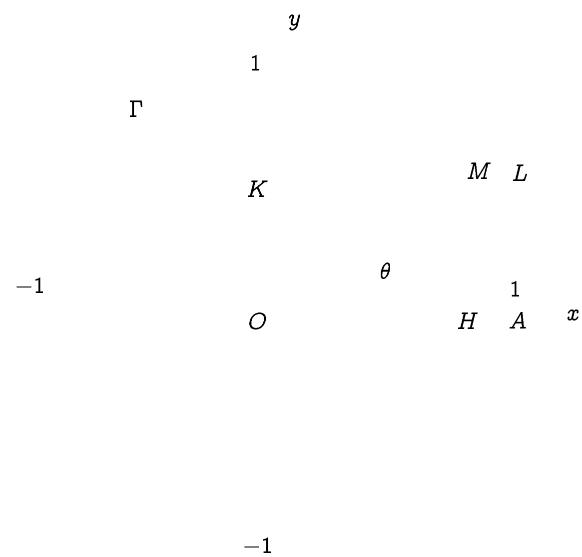
remarques :

- La distance entre deux réel x et y est donnée par : $d(x,y) = |y-x|$.
- on a également $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ ||x|-|y|| \leqslant |x-y|$
- Soit $b > 0$ et a un réel. On a les équivalences : $d(x,a) \leqslant b \Longleftrightarrow |x-a| \leqslant b \Longleftrightarrow a-b \leqslant x \leqslant a+b$ (figure ?)

1.4 Trigonométrie

1.4.1. Cercle trigonométrique

On considère le cercle Γ de centre O et de rayon 1, appelé également cercle trigonométrique.
Pour un point M quelconque sur ce cercle, on note θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$. Cet angle est défini modulo 2π, c'est-à-dire qu'en lui ajoutant $2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) on obtient une autre mesure du même angle.
On écrit $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \theta\ \ [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta\ \ [2\pi]$ (relation de congruence)



Soit H le projeté orthogonal de M sur (Ox) et K est le projeté orthogonal de M sur (Oy)

On définit $\boxed{\overline{OH} = \cos(\theta)\ ,\ \overline{OK} = \sin(\theta)}$

Lorsqu'on prolonge la droite (OM), celle ci rencontre (sauf cas particulier) la tangente au cercle en A en un point L.

On définit $\boxed{\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \overline{AL}}$

$\tan(\theta)$ et n'existe que si $\cos(\theta) \neq 0$ soit $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Remarques :

- D'après le théorème de Pythagore, on a $\boxed{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1}$
  On en déduit que $\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \ -1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1$
- Paramétrisation du Γ : on peut décrire le cercle trigonométrique comme étant l'ensemble des points M de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ lorsque θ varie dans $[0, 2\pi]$ (ou dans tout autre intervalle d'amplitude 2π).

1. 4. 2. Formulaire

Principales valeurs

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\vert\vert$

Symétries

$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$,	$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$,	$\cos(-x) = \cos(x)$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	
$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$,	$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$,	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	

Sommes

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$	$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$	

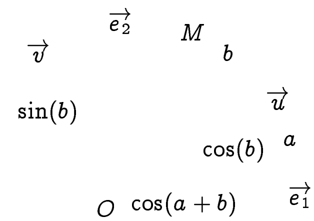
Angle double et demi-angle

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$	$\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$	$\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$		$\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

Produits → sommes

$\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$	$\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$	$\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

justification géométrique de $\cos(a+b) = \cdots$ **et** $\sin(a+b) = \cdots$



On note $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique du plan.
On considère le vecteur $\overrightarrow{u} = \cos(a)\overrightarrow{e_1} + \sin(a)\overrightarrow{e_2}$ tel que l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}) \equiv a\ [2\pi]$.
Soit $\overrightarrow{v} = -\sin(a)\overrightarrow{e_1} + \cos(a)\overrightarrow{e_2}$, le vecteur unitaire tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
On obtient ainsi une base orthonormale directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Le point M de coordonnées $(\cos(a+b), \sin(a+b))$ est tel que :
$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{u} + \sin(b)\overrightarrow{v}$
$= \cos(b)(\cos(a)\overrightarrow{e_1} + \sin(a)\overrightarrow{e_2}) + \sin(b)(-\sin(a)\overrightarrow{e_1} + \cos(a)\overrightarrow{e_2})$
$= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\,\overrightarrow{e_1} + (\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\,\overrightarrow{e_2}$
Par identification des coordonnées, on en déduit les formules suivantes :
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

1. 4. 3. Fonctions circulaires

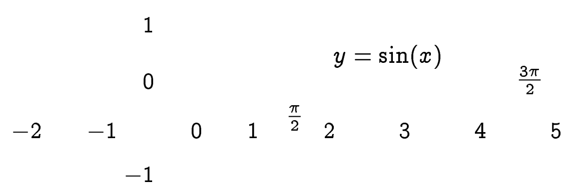
1. 4. 3. 1. Fonction sinus

Pour tout réel x, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$. La fonction sinus est périodique de période 2π, son graphe est invariant par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{\imath}$.
Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$. La fonction sinus est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
De ces deux propriétés, on en déduit qu'il suffit d'étudier sinus sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Propriété 1 :

- *La fonction sinus est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin'(x) = \cos(x)}$
- *Pour toute fonction* u *dérivable, on a* $(\sin(u(x)))' = u'(x)\cos(u(x))$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'$		0	
$\sin$	0	1	0



Propriété 2 :

Pour tout réel x*, on a* $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

On sépare en deux cas ($x < 0$ et $x \geqslant 0$) et on étudie $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x - \sin(x)$ (à savoir)

1. 4. 3. 2. Fonction cosinus

Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$. La fonction cosinus est périodique de période 2π, son graphe est invariant par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{\imath}$.
Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
De ces deux propriétés, on en déduit qu'il suffit d'étudier cosinus sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Propriété 3 :

- *La fonction cosinus est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos'(x) = -\sin(x)}$
- *Pour toute fonction* u *dérivable, on a* $(\cos(u(x)))' = -u'(x)\sin(u(x))$

x	0		π
$\cos'$	0	$-$	0
$\cos$	1		-1

1 $y = \cos(x)$ 0 π -2 -1 0 1 2 3 4 5 -1

Dérivées de sinus et cosinus - démonstrations

1. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que $x\cos(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
   En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ puis que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

2. En remarquant que $\dfrac{\cos(x)-1}{x} = \dfrac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)}$, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

3. La définition de la dérivée d'une fonction f en x_0 est $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
   Nous venons donc de montrer dans les questions 1. et 2. que $\sin'(0) = 1$ et $\cos'(0) = 0$.
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Dans le cas de la fonction sinus, le taux d'accroissement en x_0 vaut $T_{x_0} = \dfrac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$
   Vérifier que $T_{x_0} = \sin(x_0)\dfrac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\dfrac{\sin(h)}{h}$. En déduire que $\lim\limits_{h\to 0} T_{x_0} = \cos(x_0)$.
   Nous venons donc de démontrer que la fonction sinus est dérivable et que $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$.

4. Dans le cas de la fonction cosinus, le taux d'accroissement en x_0 vaut $T_{x_0} = \dfrac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h}$
   Vérifier que $T_{x_0} = \cos(x_0)\dfrac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x_0)\dfrac{\sin(h)}{h}$. En déduire que $\lim\limits_{h\to 0} T_{x_0} = -\sin(x_0)$.
   Nous venons donc de démontrer que la fonction cosinus est dérivable et que $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$.

1.4.3.3. Fonction tangente

Rappelons que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est défini pour tout $x \in D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On peut aussi écrire $D = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$

Pour tout réel $x \in D$, on a $x + \pi \in D$ et $\tan(x+\pi) = \tan(x)$. La fonction tangente est périodique de période π, son graphe est invariant par translation de vecteur $\pi\overrightarrow{\imath}$.
Pour tout réel $x \in D$, on a $-x \in D$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$. La fonction tangente est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
De ces deux propriétés, on en déduit qu'il suffit d'étudier tangente sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Propriété 4 :

- *La fonction tangente est dérivable sur D et* $\boxed{\forall x \in D, \ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}}$
- *Pour u dérivable à valeurs dans D,* $(\tan(u(x)))' = u'(x)\dfrac{1}{\cos^2(u(x))} = u'(x)\left(1 + \tan^2(u(x))\right)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'$		$+$	
			$+\infty$
$\tan$			
	0		

$y = \tan(x)$

4

3

2

1

$-\frac{\pi}{2}$ 0 $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

-1

-2

-3

-4

-5