Chapitre 2 : Calcul algébrique

2. 1 Raisonnement par récurrence

Objectif : on souhaite montrer qu'une proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
Méthode :

- "initialisation" : on vérifie que $\mathcal{P}_0$ (ou $\mathcal{P}_1$) est vraie.
- "hérédité" : on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Il faut démontrer qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Rédaction : Il faut prévenir le lecteur qu'on effectue une récurrence et ne pas oublier de conclure.
Exemples :

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. Soit la suite (u_n) telle que $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{array}\right.$

   Montrer que que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = 5 - 2^{n+2}$

Variante n° 1 : la récurrence double

- "initialisation" : on vérifie que $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
- "hérédité" : on suppose que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies. Il faut démontrer qu'alors $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

Exemple : Soit la suite (u_n) telle que $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2\ ,\ u_1 = 3 \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{array}\right.$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \ u_n = 1 + 2^n$

Variante n° 2 : la récurrence forte

- "initialisation" : on vérifie que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- "hérédité" : on suppose que $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ sont vraies. Il faut démontrer qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ telle que $\left\{\begin{array}{l} u_1 = 1 \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{n}\left(u_1 + \cdots + u_n\right) \end{array}\right.$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \ u_n = 1$

2. 2 Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

2. 2. 1. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Échange des lignes L_i et L_j : transposition élémentaire
Soit, par exemple :

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrl} 3x & -y & -z & = 2 \\ x & -2y & +3z & = 3 \\ x & & +z & = -1 \end{array}\right.$$

On peut échanger la troisième ligne L_3 , avec la première ligne L_1. On notera alors

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \left\{\begin{array}{rrrl} x & & +z & = -1 \\ x & -2y & +3z & = 3 \\ 3x & -y & -z & = 2 \end{array}\right.$$

Ce n'est plus le même système, mais on conserve le même ensemble de solutions.
Ajout de $\lambda.L_j$ à L_i pour $i \neq j$: transvection élémentaire
Dans le système que nous venons d'écrire, on peut décider (avec $\lambda = -1$) d'ajouter $-L_1$ à la deuxième ligne L_2. Ce qui donne :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \left\{\begin{array}{rrrl} x & & +z & = -1 \\ & -2y & +2z & = 4 \\ 3x & -y & -z & = 2 \end{array}\right.$$

Si, pris d'un remord après une opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, on souhaite revenir au système précédent, on peut faire $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$.

Ce qui fait que cette opération élémentaire ne change pas l'ensemble des solutions du système.

Multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$: dilatation élémentaire

Dans le système

$$\begin{cases} x & & +z & = -1 \\ & -2y & +2z & = 4 \\ 3x & -y & -z & = 2 \end{cases}$$

On peut décider (avec $\lambda = \frac{1}{2}$) de multiplier par λ la deuxième ligne L_2. Ce qui donne :

$$L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_2 \begin{cases} x & & +z & = -1 \\ & -y & +z & = 2 \\ 3x & -y & -z & = 2 \end{cases}$$

Si, après une opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$, on souhaite revenir au système précédent, on peut faire $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda}L_i$.

Ce qui fait que cette opération élémentaire ne change pas l'ensemble des solutions du système.

Nous utiliserons ces trois types d'opérations : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$, $L_i \leftarrow k.L_i$ $(k \neq 0)$.
Par ces opérations élémentaires, on transforme peu à peu le système par équivalence afin de le résoudre.

Exemple :

Reprendre le système précédent, et le transformer successivement par les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

Que peut-on en déduire concernant l'ensemble des solutions du système ?

2. 2. 2. Méthode du pivot (de Gauss)

Principe général :

Soit un système (S) $\begin{cases} a_{1,1}x & +a_{1,2}y & +a_{1,3}z & = b_1 \\ a_{2,1}x & +a_{2,2}y & +a_{2,3}z & = b_2 \\ a_{3,1}x & +a_{3,2}y & +a_{3,3}z & = b_3 \end{cases}$

Quitte à permuter certaines lignes ou des variables, nous allons suppose que $a_{1,1} \neq 0$.

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a_{2,1}}{a_{1,1}}L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a_{2,1}}{a_{1,1}}L_1$ on transforme ce système en :

$$(S) \sim \begin{cases} a_{1,1}x & +a_{1,2}y & +a_{1,3}z & = b_1 \\ & a'_{2,2}y & +a'_{2,3}z & = b'_2 \\ & a'_{3,2}y & +a'_{3,3}z & = b'_3 \end{cases}$$

En supposant $a'_{2,2} \neq 0$, on poursuit avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{a'_{3,2}}{a'_{2,2}}L_2$ ce qui donne :

$$(S) \sim \begin{cases} a_{1,1}x & +a_{1,2}y & +a_{1,3}z & = b_1 \\ & a'_{2,2}y & +a'_{2,3}z & = b'_2 \\ & & a''_{3,3}z & = b''_3 \end{cases}$$

On obtient alors un système dit **échelonné** qui peut se résoudre en cascade. Il y a plusieurs issues possibles :

Exemple 1

$$(S_1) \begin{cases} x & -y & -z & = -1 \\ x & -2y & +z & = 0 \\ x & +y & +z & = 3 \end{cases} \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\sim} \begin{cases} x & -y & -z & = -1 \\ & -y & +2z & = 1 \\ x & +y & +z & = 3 \end{cases} \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1}{\sim} \begin{cases} x & -y & -z & = -1 \\ & -y & +2z & = 1 \\ & 2y & +2z & = 4 \end{cases}$$

$$\underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + 2\ell_2}{\sim} \begin{cases} x & -y & -z & = -1 \\ & -y & +2z & = 1 \\ & & 6z & = 6 \end{cases}$$ Ce système échelonné se résout en cascade : $(S_1) \sim \begin{cases} x & = -1 + y + z = 1 \\ y & = -1 + 2z = 1 \\ z & = 1 \end{cases}$

Le système admet une solution unique. L'ensemble des solutions de (S_1) est $\mathcal{S}_1 = \Big\{(1, 1, 1)\Big\}$

Exemple 2

$$(S_2)\left\{\begin{array}{llll} x & -y & +5z & =7\\ x & -2y & +7z & =8\\ x & +y & +z & =3\end{array}\right. \underset{\ell_2\leftarrow \ell_2-\ell_1}{\sim} \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +5z & =7\\ & -y & +2z & =1\\ x & +y & +z & =3\end{array}\right. \underset{\ell_3\leftarrow \ell_3-\ell_1}{\sim} \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +5z & =7\\ & -y & +2z & =1\\ & 2y & -4z & =-4\end{array}\right.$$

$$\underset{\ell_3\leftarrow \ell_3+2\ell_2}{\sim} \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +5z & =7\\ & -y & +2z & =1\\ & & 0 & =-2\end{array}\right.$$

On constate qu'il n'y a pas de solution au système (on dit aussi que le système est impossible ou que les équations sont incompatibles). L'ensemble des solutions de (S_2) est $\mathcal{S}_2=\emptyset$

Exemple 3

$$(S_3)\left\{\begin{array}{llll} 2x & -y & +z & =2\\ x & -y & +3z & =-1\\ 3x & -2y & +4z & =1\end{array}\right. \underset{\ell_2\leftrightarrow \ell_1}{\sim} \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +3z & =-1\\ 2x & -y & +z & =2\\ 3x & -2y & +4z & =1\end{array}\right. \underset{\ell_2\leftarrow \ell_2-2\ell_1}{\sim} \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +3z & =-1\\ & y & -5z & =4\\ 3x & -2y & +4z & =1\end{array}\right.$$

$$\underset{\ell_3\leftarrow \ell_3-3\ell_1}{\sim} \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +3z & =-1\\ & y & -5z & =4\\ & y & -5z & =4\end{array}\right. \underset{\ell_3\leftarrow \ell_3-\ell_2}{\sim} \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +3z & =-1\\ & y & -5z & =4\\ & & 0 & =0\end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{llll} x & -y & +3z & =-1\\ & y & -5z & =4\end{array}\right.$$

Dans un cas comme celui-là (on n'a deux équations pour 3 inconnues), on passe une des inconnues dans le second membre. Cette inconnue, par exemple z ici, devient paramètre qu'on peut nommer α.

$$\left\{\begin{array}{ll} x & =y-3z-1=3+2\alpha\\ y & =4+5\alpha\\ z & =\alpha\end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2\alpha\\ 4+5\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} 2\\ 5\\ 1\end{pmatrix}.$$

On obtient une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_3=\Big\{(3+2\alpha,4+5\alpha,\alpha)\ /\ \ \alpha\in\mathbb{R}\Big\}$.

vocabulaire :

— Les pivots sont les coefficients non nuls qui apparaissent sur la diagonale lorsqu'on transforme le système en un système échelonné.

— Le nombre de pivot obtenu s'appelle le rang du système.

— Les inconnues associées aux pivots s'appellent inconnues principales, les inconnues qui passent dans le second membre s'appellent inconnues secondaires.

— Dans le cas d'un système avec des paramètres dans le second membre, on peut voir apparaitre ce qui s'appelle une équation de compatibilité. Par exemple :

$$(S_4)\left\{\begin{array}{llll} x & -2y & +z & =a\\ x & -y & +2z & =b\\ 2x & -3y & +3z & =c\end{array}\right. \underset{\substack{\ell_2\leftarrow \ell_2-\ell_1\\ \ell_3\leftarrow \ell_3-2\ell_1}}{\sim} \left\{\begin{array}{llll} x & -2y & +z & =a\\ & y & +z & =b-a\\ & y & +z & =c-2a\end{array}\right. \underset{\ell_3\leftarrow \ell_3-\ell_2}{\sim} \left\{\begin{array}{llll} x & -2y & +z & =a\\ & y & +z & =b-a\\ & & 0 & =c-a-b\end{array}\right..$$

Ce système admet des solutions si et seulement si $c-a-b=0$ (équation de compatibilité). En supposant cette condition vérifiée, on peut poursuivre la résolution par exemple en posant $z=\alpha$ et en le passant dans le second membre.

$$\left\{\begin{array}{ll} x & =a+2y-z=2b-a-\alpha\\ y & =b-a-\alpha\\ z & =\alpha\end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b-a-\alpha\\ b-a-\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}.$$

Conclusion :

- Si $c-a-b\neq 0$ alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_{a,b,c}=\emptyset$
- Si $c-a-b=0$ alors l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_{a,b,c}=\left\{\begin{pmatrix} 2b-a-\alpha\\ b-a-\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

2. 2. 3. Interprétation géométrique

Systèmes avec deux inconnues

Chaque équation peut se voir comme équation cartésienne d'une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$. Résoudre le système revient à déterminer l'intersection de ces droites.

Résoudre (avec la méthode du pivot), chacun des systèmes suivants, et faire un schéma de la situation :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2x+y=-1 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{l} x+2y=1 \\ 2x+4y=-2 \end{array}\right. \qquad (S_3)\left\{\begin{array}{l} x-y=2 \\ -x+y=-2 \end{array}\right.$$

Systèmes avec trois inconnues

Chaque équation peut se voir comme équation cartésienne d'un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Résoudre le système revient à déterminer l'intersection de ces plans.

Reprendre les exemples 1, 2, 3 du paragraphe précédent et faire un schéma de la situation.

Dans l'exemple 3 l'ensemble des solutions $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ est la droite passant par le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 3 Sommes, symbole Σ, sommes classiques

2. 3. 1. Notation Σ

Une somme $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ peut se noter également $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$

où $\left\{\begin{array}{l} a_k \text{ est une expression qui dépend de } k \\ k \text{ s'appelle l'indice de sommation} \\ 1 \text{ et } n \text{ s'appellent les bornes de sommation} \end{array}\right.$

Notons que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{p=1}^{n} a_p = \cdots$

On peut changer la lettre k par toute autre lettre sans que cela ne modifie la valeur de la somme S. On dit que k est un indice muet.

Notation plus générale

On considère un ensemble fini d'indice $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, et on pose : $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k}$.

Par convention, si $I = \emptyset$ alors $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i = 0$.

2. 3. 2. Règles de calcul sur les Σ

On sait que :

— $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a : $(x+y)+z = x+(y+z)$. On dit que l'addition est associative dans $\mathbb{R}$.

— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $x+y = y+x$. On dit que l'addition est commutative dans $\mathbb{R}$.

— $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a : $(x+y)z = xz+yz$ et $x(y+z) = xy+xz$.
On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Ces règles usuelles sur l'addition se généralisent aux sommes écrites avec un Σ, en particulier :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$

Par contre, en général, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \times b_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k$ de même que $\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k} \neq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$

A noter qu'en absence de parenthèse, il peut y avoir une certaine ambiguïté :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est à prendre dans le sens $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \text{ est à écrire plutôt que } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Changement d'indice

Une même somme peut se noter de plusieurs manières. Par exemple $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+1}$

Pour passer directement d'un sigma à l'autre il faut :

$$\begin{cases} \text{écrire la relation entre les deux indices } k \text{ et } p \\ \text{Changer les bornes de sommations} \\ \text{Changer l'expression contenue dans la somme} \end{cases}$$

ce qui donne pour l'exemple ci-dessus

$$\begin{cases} p = k-1 \\ k = p+1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} k=2 \iff p=1 \\ k=n \iff p=n-1 \end{matrix} \qquad \text{et} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{p+1}$$

2. 3. 3. Sommes classiques. Somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique

2. 3. 3. 1. Expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} x^k$

Propriété 1 :

Pour tout entier naturel n non nul : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

Démonstration ?

Propriété 2 :

Pour tout entier naturel n non nul : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Démonstration : on considère la somme $S_3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$.

1. Effectuer le changement d'indice $p = k-1$ dans la somme S_3.
2. En déduire que $(n+1)^3 = 3\sum_{p=0}^{n} p^2 + 3\sum_{p=0}^{n} p + \sum_{p=0}^{n} 1$.
3. Conclure : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \cdots$

Propriété 3 :

Pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{\forall x \neq 1\,, \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \textit{et si} \quad x=1 \quad \textit{alors} \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = n+1}$$

2. 3. 3. 2. Somme des termes d'une progression arithmétique ou géométrique

Définition 1 :

On dit que (u_n) est une suite arithmétique si : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + r$
où r est une constante qui s'appelle la raison de la suite.

Propriété 4 :

> — *Pour toute suite arithmétique* (u_n) *on a :* $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r$
>
> — *La somme des termes d'une suite arithmétique est donnée par :*
>
> $$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

Définition 2 :

> *On dit que* (u_n) *est une suite géométrique si* $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$
> *où* q *est une constante qui s'appelle la raison de la suite.*

Propriété 5 :

> — *Pour toute suite géométrique* (u_n) *on a :* $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n = u_1 q^{n-1}$
>
> — *La somme des termes d'une suite géométrique de raison* $q \neq 1$ *est donnée par :*
>
> $$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{u_p - u_{n+1}}{1-q}$$

2. 3. 4. Sommes télescopiques, regroupement de termes

— Certaines sommes peuvent simplifier "en cascade" comme par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

— Certaines sommes peuvent se simplifier en regroupant des termes. Par exemple $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$.

En développant on observe que :
$S_n = 0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + -7 + 8 \cdots + (-1)^n n = (-1+2) + (-3+4) + (-5+6) + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots$.
On va regrouper les termes deux par deux. On remarque cependant que le dernier terme dépend la parité de n.

- Si n est un entier pair. On pose $n = 2p$. On laisse le terme correspondant à $k = 0$ de côté et on regroupe tous les autres termes deux par deux :
$S_{2p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k k = \sum_{i=1}^{p}\Big((-1)^{2i-1}(2i-1) + (-1)^{2i}(2i)\Big) = \sum_{i=1}^{p}\Big(-(2i-1) + (2i)\Big) = \sum_{i=1}^{p} 1 = p = \frac{n}{2}$
- Si n est un entier impair. On pose $n = 2p+1$, on peut regroupe les termes deux par deux sauf le dernier :
$S_{2p+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k k + (-1)^{2p+1}(2p+1) = \sum_{i=1}^{p} 1 - (2p+1) = p - 2p - 1 = -p - 1 = -\frac{n+1}{2}$

2. 3. 5. Somme double

- **somme rectangulaire**

Considérons un tableau de réels avec n lignes et p colonnes :

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$\cdots$	$a_{1,p}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$\cdots$	$a_{2,p}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$\cdots$	$a_{3,p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	$\cdots$	$a_{n,p}$

Si on veut ajouter tous les réels contenus dans ce tableau on peut :

— soit, pour chaque ligne $n^\circ\, i$ ajouter les termes sur cette ligne, puis ajouter toutes ces sommes :

$$S = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j}\right) + \left(\sum_{j=1}^{p} a_{2,j}\right) + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{p} a_{n,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right)$$

— soit, pour chaque colonne $n^\circ\, j$ ajouter les termes dans cette colonne, puis ajouter toutes ces sommes :

$$S = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,2}\right) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,p}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

Dans les deux cas le résultat sera le même et est noté : $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j}$

- **sommes triangulaires**

  Nous rencontrerons parfois d'autres types de sommes doubles. Par exemple, il existe des cas où une borne de sommation dépend de l'indice de l'autre somme :

  $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}$.

  Dans ce cas précis, on ajoute des réels que l'on peut disposer dans un triangle :

$a_{1,1}$				
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$			
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	$\cdots$	$a_{n,n}$

  Pour chaque ligne n°i, on ajoute $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,i}$ puis on fait la somme de tous ces résultats.

  Pour cet exemple on écrira $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$

- **Produit de deux sommes finies**

  On a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{j=1}^{p} b_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_k.b_j = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_k.b_j}$ en utilisant la distributivité.

2. 4 Quelques formules

2. 4. 1. Fonction factorielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la factorielle de n est définie par $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ et, par convention $0! = 1$.
En dénombrement $n!$ compte le nombre de permutations de n éléments.

2. 4. 2. Nombre de combinaisons - coefficients binomiaux

Définition 1 :

On note $\dbinom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments d'un ensemble ayant n éléments. Cela correspond aussi au nombre de façons de choisir p éléments parmi n.

Propriété 1 :

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

— *En général* $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

— *On a les valeurs particulières :* $\dbinom{n}{0} = 1$, $\dbinom{n}{1} = n$ *et* $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

— *On a :* $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$

— *Lorsque* $p \geqslant 1$ *on a* $\dbinom{n+1}{p} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p-1}$

ce qui permet de construire le triangle de Pascal..

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$	1		
6	1	6	15	20	$\boxed{15}$	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

on obtient, par exemple, ici $\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 5 = 15$.

2. 4. 3. Formule du binôme ou de Newton (1643-1727)

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ et $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ se généralisent en

Théorème 1 :

Soient a, b des réels et n un entier naturel. Alors

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

2. 4. 4. Une identité remarquable : $a^n - b^n = \cdots$

On connait la factorisation : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

On a également : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Ce qui se généralise en :

Propriété 2 :

Soient a, b des réels et n un entier naturel. Alors

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right)}$$

2. 5 Signe produit Π

Un produit $P = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ peut se noter également $P = \prod_{k=1}^{n} a_k$

Notation plus générale

On considère un ensemble fini d'indice $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, et on pose : $\prod_{i \in I} a_i = a_{i_1} \times a_{i_2} \times \cdots \times a_{i_n} = \prod_{k=1}^{n} a_{i_k}$.

Par convention, si $I = \emptyset$ alors $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

Exemples : $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, $\prod_{k=1}^{n} p = p^n$.

On a aussi les formules $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$ et $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k)$