Chapitre 3 : Fonctions d'une variable réelle

3. 1 Généralités

3. 1. 1. Application, ensemble de définition

Définition 1 :

- *Une application est la donnée d'un ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrivée F, et d'une relation qui, à tout élément x de E associe un élément de F.*
  On résume ceci en écrivant $f : E \longrightarrow F\ ;\ x \longmapsto f(x)$
- *L'ensemble des applications de E à valeurs dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E.*

Exemples :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,; x \longmapsto x^2e^x$
$g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\,; x \longmapsto x^2e^x$ sont trois applications différentes.
$h : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[\,; x \longmapsto x^2e^x$

Remarques :

— ne pas confondre l'application f et l'élément $f(x)$. (une application $\neq$ un réel).
— précision sur le vocabulaire : une "fonction" associe à tout x au plus une image $f(x)$. lorsqu'on restreint l'ensemble de départ à une partie où $f(x)$ existe pour tout x, on parle alors d'application. L'usage courant et le programme officiel permettent la confusion des mots "fonction" et "application".
— On appelle antécédent d'un élément $y \in F$ tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Il n'est pas dit dans la définition d'une application que tout élément y de l'ensemble d'arrivée F admet un antécédent.

Vocabulaire

On appelle **restriction** d'une application f à une partie $A \subset E$ l'application $f|_A : A \longrightarrow F\ ;\ x \longmapsto f(x)$.
Par exemple, $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}\,; x \longmapsto \sin(x)$ est la restriction à $[0, 2\pi]$ de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,; x \longmapsto \sin(x)$.
On peut écrire dans ce cas $g = f|_{[0,2\pi]}$

En général, les ensembles E et F ne sont pas obligatoirement des parties de $\mathbb{R}$. Par exemple
On appelle **fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E**, la fonction suivante

$$\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0, 1\}\ ;\ x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

ou encore on appelle **application identique** d'un ensemble E, l'application suivante

$$Id_E : E \longrightarrow E\ ;\ x \longmapsto x$$

Néanmoins dans ce chapitre, nous considérerons des applications d'une variable réelle (i.e. $E \subset \mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (i.e. $F \subset \mathbb{R}$).

Domaine de définition

Définition 2 :

Le domaine de définition d'une fonction d'une variable réelle x est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où l'on puisse définir $f(x)$.

Dans la pratique, la recherche d'un ensemble de définition d'une fonction se résume à trouver les valeurs de x pour lesquelles le dénominateur est non nul, ce qui est à l'intérieur d'un log est > 0 ce qui est à l'intérieur d'une racine carrée est $\geqslant 0$.

3. 1. 2. Graphe d'une application

Définition 3 :

Le graphe d'une application $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ du plan

Activité :

Connaissant le graphe d'une fonction f, comment peut-on en déduire le graphe des fonctions suivantes :

- $x \longmapsto f(x) + a$
- $x \longmapsto f(x + a)$
- $x \longmapsto f(ax)$
- $x \longmapsto af(x)$

3. 1. 3. Parité, imparité, périodicité

Définition 4 :

On dit qu'une application f , définie sur un domaine D symétrique par rapport à 0 est :

— *paire si :* $\forall x \in D\,,\quad f(-x) = f(x)$

— *impaire si :* $\forall x \in D\,,\quad f(-x) = -f(x)$

Les polynômes constitués de monômes de degrés pairs (respectivement impairs) sont des fonctions paires (respectivement impaires). Les fonctions sinus, tangente sont impaires et la fonction cosinus est paire.

Propriété 1 :

— *le graphe d'une application paire est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.*

— *le graphe d'une application impaire est symétrique par rapport à l'origine.*

Définition 5 :

On dit qu'une application f, définie sur un domaine D est périodique de période T si :

$$\forall x \in D\,,\quad x + T \in D \quad et \quad f(x + T) = f(x)$$

La plus petite période strictement positive de f s'appelle période fondamentale.

Les applications $x \longmapsto \cos(\omega x)$, $x \longmapsto \sin(\omega x)$, et $x \longmapsto \tan(\omega x)$ sont périodiques. En déterminer la période fondamentale (en fonction de ω).

3. 1. 4. Opérations sur les applications

Soient f et g , deux applications définies sur un même domaine D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

— la somme de f et g est l'application $f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}\;;\; x \longmapsto f(x) + g(x)$

— le produit de f et g est l'application $f \times g : D \longrightarrow \mathbb{R}\;;\; x \longmapsto f(x) \times g(x)$

— on peut faire ce qui s'appelle des combinaisons linéaires des applications f et g. Pour λ, μ réels fixés, on pose : $\lambda f + \mu g : D \longrightarrow \mathbb{R}\;;\; x \longmapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$

Composition des applications

Définition 6 :

La composée de deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ est l'application :
$g \circ f : E \longrightarrow G\;;\; x \longmapsto g(f(x))$

Schéma :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\quad f \quad} & F & \xrightarrow{\quad g \quad} & G \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g \circ f(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Exemples

— Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\;;\; x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\;;\; x \longmapsto 3x + 2$. Décrire l'application $g \circ f$.

— L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\;;\; x \longmapsto \cos^3(x)$ est la composée de quelles applications ?

— Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\;;\; x \longmapsto \ln(x)$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[\;;\; x \longmapsto e^x$. Décrire $g \circ f$ et $f \circ g$.

— Prouver, par un contre-exemple, qu'en général $g \circ f \neq f \circ g$.

Propriété 2 :

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Alors $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$.

3. 1. 5. Monotonie

Définition 7 :

Une application $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est dite :

— *strictement croissante sur D, si $\forall (x,y) \in D^2$, $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$*
— *strictement décroissante sur D, si $\forall (x,y) \in D^2$, $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$*
— *croissante sur D, si $\forall (x,y) \in D^2$, $x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$*
— *décroissante sur D, si $\forall (x,y) \in D^2$, $x < y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$*
— *monotone (respectivement strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. stric.)*

3. 1. 6. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 8 :

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

- *$M \in \mathbb{R}$ majore la fonction f sur D si : $\forall x \in D, f(x) \leqslant M$*
- *f est majorée sur D si elle admet (au moins) un majorant.*
- *$m \in \mathbb{R}$ minore la fonction f sur D si : $\forall x \in D, m \leqslant f(x)$*
- *f est minorée sur D si elle admet (au moins) un minorant.*
- *f est bornée sur D si : f est majorée et minorée sur D.*

Propriété 3 :

f est bornée sur D si et seulement si $|f|$ est majorée sur D

3. 1. 7. Injection, surjection

Définition 9 :

Une application $f : E \longleftarrow F$ est dite :

— *injective si pour tout $y \in F$, il existe au plus un antécédent par f. Ce qui équivaut à la condition*
$\forall (x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
— *surjective si tout élément $y \in F$ admet au moins un antécédent par F. Ce qui s'énonce aussi*
$\forall y \in F$, $\exists x \in E$; $y = f(x)$.
— *bijective si tout élément $y \in F$ admet un unique antécédent par F. Ce qui s'énonce aussi*
$\forall y \in F$, $\exists!\, x \in E$; $y = f(x)$.

Exemples

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x^4$ est-elle injective ? surjective ?
Donner un exemple d'application injective et non surjective, un exemple d'application surjective et non-injective.

3. 2 Dérivation et étude d'une fonction

3. 2. 1. Notion de dérivée

Définition 1 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$ existe.
On appelle alors dérivée de f en a le réel :

$$f'(a) = \frac{d\,f}{d\,x}(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I.

Notations :

Selon le contexte, la fonction dérivée de f se note f' ou $\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}$.
La notation $\dfrac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}$ rappelle que la dérivée est la limite du taux d'accroissement $\dfrac{\Delta\,f}{\Delta\,x}$ quand $\Delta\,x$ tend vers 0.

Exemples :

Montrer, en utilisant cette définition, que f est dérivable au point a et calculer $f'(a)$:

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto x^2$
- Soit $a \in]0, +\infty[$ et $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \sqrt{x}$

Interprétation géométrique

La dérivée est la limite du taux d'accroissement de f. Géométriquement, $f'(a)$ donne le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point $M(a, f(a))$

Propriété 1 :

> *Soit f dérivable en a. Alors la courbe de f admet en $M(a, f(a))$ une tangente dont une équation est : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$*

3. 2. 2. Calculs de dérivées

3. 2. 2. 1. Combinaison linaire, produit , quotient, composée

Propriété 2 :

> *Soient f et g deux fonctions dérivables sur I, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors :*
> *$\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$*
> *fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'.g + f.g'$*
> *si, de plus, g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$*

Propriété 3 :

> *Soient f dérivable sur I et g dérivable sur J telles que $f(I) \subset J$ alors :*
> *$g \circ f$ est dérivable sur I et : $\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$*

Remarque : Avec la notation $\dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}$ de la dérivée, cette propriété se résume à $\dfrac{\mathrm{d}\,(g \circ f)}{\mathrm{d}\, x} = \dfrac{\mathrm{d}\, g}{\mathrm{d}\, f}\dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}$ en comprenant $\dfrac{\mathrm{d}\, g}{\mathrm{d}\, f}$ comme étant $g'(f(x))$.

3. 2. 3. Exemples de calculs de dérivées partielles

Lorsque l'application f dépend de plusieurs variables, la dérivée par rapport à l'une des variables s'appelle dérivée partielle et se note avec des "∂".

Exemples :

$f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^5 + 4xy^3 - 2y + 3x^3$.

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

3. 2. 4. Variations d'une fonction et dérivation

Propriété 4 :

> *Soit f dérivable sur un intervalle I, alors :*
> - *f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$*
> - *f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$*
> - *f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$*
> - *f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$ et si l'ensemble des points où la dérivée f' s'annule ne contient pas d'intervalle non vide ni réduit à un point.*

Conséquences :

Si $f' > 0$ sur I sauf, éventuellement, en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Si $f' < 0$ sur I sauf, éventuellement, en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.

3. 2. 5. Fonction de classe C^1, dérivées d'ordre supérieur

Définition 2 :
> *On dit qu'une fonction f est de classe C^1 sur un intervalle I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I*

Somme, produit, combinaisons linéaires, composée de fonctions de classe C^1 donnent une fonction de classe C^1.

Définition 3 :
> *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si la fonction f' est elle-même dérivable, on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f*

En généralisant, en dérivant successivement p fois la fonction f, on obtient la dérivée p-ième de f qui se note $f^{(p)}$ ou $\frac{\mathrm{d}^p f}{\mathrm{d}x^p}$. Dans ce contexte, par convention, on posera $f^{(0)} = f$

3. 2. 6. Plan d'étude d'une fonction

On adoptera le plan suivant :

- recherche du domaine de définition.
- Réduction du domaine d'étude (parité, périodicité, symétries)
- Calcul de la dérivée, recherche de son signe (résoudre $f'(x) > 0$ et pas seulement $f'(x) = 0$).
- Tableau de variation.
- Mise en évidence d'éventuelles asymptotes :
  - **asymptote horizontale :**
    si $\lim_{t \to \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote à Γ.
  - **asymptote verticale :**
    si $\lim_{t \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à Γ.
  - **asymptote oblique :**
    si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax - b = 0$ $(a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à Γ.
    Pour l'instant, on peut convenir que les réels a, b seraient donnés dans l'énoncé. Nous développerons ultérieurement des techniques qui permettent de trouver les valeurs de a, b.
- Tracé du graphe Γ de f.

3. 3 Fonctions bijectives

3. 3. 1. Bijections

Définition 1 :
> *Une application $f : E \longleftarrow F$ est dite bijective si :*
>
> $$\forall y \in F \ , \ \exists x \in E \quad \text{tel que} \ \ y = f(x)$$
>
> *Dans ce cas l'application de F vers E qui à y associe x tel que $y = f(x)$ s'appelle la bijection réciproque de f et se note f^{-1}. Ainsi :*
>
> $$\boxed{\forall x \in E \ , \ \forall y \in F \ , \ \ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

Par exemple $f : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[\ ; \ \ x \longmapsto x^2 + 1$ est bijective (à montrer) et sa bijection réciproque est ?...

Propriété 1 :
> *Si f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ alors les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice du repère*

3. 3. 2. Bijection des fonctions continues strictement monotones sur un intervalle

Théorème 1 :
Si f est strictement monotone, continue sur un intervalle I.
Alors f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.
De plus, l'application réciproque f^{-1} est continue sur J, strictement monotone de même sens de variation que f.
(admis)

3. 3. 3. Dérivation d'une fonction réciproque

Propriété 2 :
I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On suppose que f est continue, strictement monotone sur I et réalise ainsi une bijection de I sur $J = f(I)$. Soit $x \in J = f(I)$.
Si f est dérivable en $f^{-1}(x)$ et si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x et

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Si $f'(f^{-1}(x)) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en x et la courbe représentative de f^{-1} admet au point d'abscisse x une tangente verticale.

En partant de $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ par passage à la limite (si elle existe) on obtient $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$ (faire une figure).

Exemples : Appliquer cette propriété aux cas des fonctions suivantes :
- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[\,;\ x \longmapsto e^x$
- Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\,;\ x \longmapsto x^2$
- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ x \longmapsto x^3$

remarques :
- On peut aussi utiliser la propriété précédente sous la forme suivante :
  si f est dérivable sur I et si $\forall, x \in I,\ f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) alors :
  f est strictement croissante (resp. décroissante), continue, bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est dérivable sur $f(I)$.
- Le sens de variation de f^{-1} est le même que le sens de variation de f.

3. 4 Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Définition 1 :
On appelle :
- *cosinus hyperbolique, la fonction* $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ x \longmapsto \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- *sinus hyperbolique, la fonction* $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ x \longmapsto \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Propriété 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

a) Étude de la fonction sh

1. Quelle est la parité de sh ?
2. Calculer sa dérivée première, sa dérivée seconde, ses limites aux bornes. Dresser son tableau de variations.
3. Tracer la représentation graphique de sh.

b) Étude de la fonction ch
mêmes questions.

d) D'où provient le terme hyperbolique ?

Une hyperbole est une courbe du plan dont une équation cartésienne est, dans un repère orthonormal : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (où $a > 0$ et $b > 0$)

sh étant une bijection de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on peut poser pour tout réel y, $y = b\ \mathrm{sh}(t)$. On obtient deux valeurs possibles pour x : $x = a\ \mathrm{ch}(t)$ ou $x = -a\ \mathrm{ch}(t)$.

Lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, les points $M_1(-a\ \mathrm{ch}(t), b\ \mathrm{sh}(t))$ et $M_2(a\ \mathrm{ch}(t), b\ \mathrm{sh}(t))$ décrivent deux branches d'une courbe qui s'appelle une hyperbole.

3. 5 Fonctions circulaires réciproques

a) Fonction Arc sinus

↱ Montrer que la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle à préciser.

Définition 1 :

La fonction réciproque de cette bijection est appelée Arc sinus :

$$\mathrm{Arcsin}\ :\ [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ ;\ x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x)$$

ainsi

$$\boxed{\forall x \in [-1,1]\ ,\ \ \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ ,\quad y = \mathrm{Arcsin}(x) \Longleftrightarrow x = \sin(y)}$$

↱ Simplifier $\cos^2(\mathrm{Arcsin}(x))$ puis $\cos(\mathrm{Arcsin}(x))$.

↱ En déduire les valeurs de x pour lesquelles Arcsin est dérivable en x et déterminer $\mathrm{Arcsin}\,'(x)$.

Propriété 1 :

- $\forall x \in]-1,1[$, Arcsin *est dérivable en* x *et* $\boxed{\mathrm{Arcsin}\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$
- Arcsin *n'est pas dérivable en* $x = \pm 1$.

↱ Tracer la représentation graphique de la fonction Arcsin. Que peut-on dire de la courbe au voisinage du point des points d'abscisse $x = \pm 1$?

a) Fonction arc cosinus

↱ Montrer que la restriction de cos à $[0,\pi]$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur un intervalle à préciser.

Définition 2 :

La fonction réciproque de cette bijection est appelée arc cosinus :

$$\mathrm{Arccos}\ :\ [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]\ ;\ x \longmapsto \mathrm{Arccos}(x)$$

ainsi

$$\boxed{\forall x \in [-1,1]\ ,\ \ \forall y \in [0,\pi]\ ,\quad y = \mathrm{Arccos}(x) \Longleftrightarrow x = \cos(y)}$$

↱ Simplifier $\sin^2(\mathrm{Arccos}(x))$ puis $\sin(\mathrm{Arccos}(x))$.

↱ En déduire les valeurs de x pour lesquelles Arccos est dérivable en x et déterminer $\mathrm{Arccos}\,'(x)$.

Propriété 2 :

- $\forall x \in]-1,1[$, Arccos *est dérivable en* x *et* $\boxed{\mathrm{Arccos}\,'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$
- Arccos *n'est pas dérivable en* $x = \pm 1$.

↱ Tracer la représentation graphique de la fonction Arccos. Que peut-on dire de la courbe au voisinage du point des points d'abscisse $x = \pm 1$?

Propriété 3 :

$$\forall x \in [-1,1]\ ,\quad \mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

↱ Démonstration ?

c) Fonction arc tangente

↱ Montrer que la restriction de la fonction tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ réalise une bijection et préciser l'intervalle d'arrivée.

Définition 3 :

La fonction réciproque de cette bijection est appelée arc tangente :

$$\text{Arctan} \ : \ \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ ; \ x \ \longmapsto \ \text{Arctan}(x)$$

ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ , \quad y = \text{Arctan}(x) \Longleftrightarrow x = \tan(y)}$$

↱ Déterminer les valeurs de x pour lesquelles Arctan est dérivable en x et calculer Arctan $'(x)$.

Propriété 4 :

$\forall x \in \mathbb{R}$, Arctan *est dérivable en x et* $\boxed{\text{Arctan}\,'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

↱ Tracer la représentation graphique de la fonction Arctan.

Propriété 5 :

- $\forall x > 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\forall x < 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = -\dfrac{\pi}{2}$

3. 6 Fonctions de variables réelles à valeurs complexes

On considère une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}; t \longmapsto f(t)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
On pose $f_1(t) = Re(f(t))$ et $f_2 = Im(f(t))$ et
$f : I \longrightarrow \mathbb{C}; t \longmapsto f_1(t) + i\, f_2(t)$

Définition 1 :

On dit que f est continue , dérivable, deux fois dérivable ... si f_1 et f_2 sont continues, dérivables, deux fois dérivables ...
Si f est dérivable, on pose $f' : I \longrightarrow \mathbb{C}; t \longmapsto f_1'(t) + i f_2'(t)$

Propriété 1 :

Soient $k \in \mathbb{C}$, u et v, deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$\bullet\ (u+v)' = u' + v' \quad \bullet\ (k.u)' = k.u' \quad \bullet\ (u.v)' = u'.v + u.v' \quad \bullet\ (v \circ u)' = (v' \circ u).u'$

$\bullet\ \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ *si u est non nulle sur I* $\bullet\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$ *si v est non nulle sur I*

Propriété 2 :

Soit $a \in \mathbb{C}$.
La fonction $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}; t \longmapsto e^{at}$ est dérivable et sa dérivée est $\psi' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}; t \longmapsto a.e^{at}$

Propriété 3 :

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I.
Alors l'application $\exp(\varphi) : t \longmapsto \exp(\varphi(t))$ est dérivable sur I et $\left(\exp(\varphi)\right)'(t) = \varphi'(t)\exp(\varphi(t))$

Propriété 4 :

- *Si f est dérivable alors l'application $\overline{f} : t \longmapsto \overline{f(t)}$ est dérivable et $(\overline{f})' = \overline{f'}$*
- *Si f est dérivable et non nulle sur I, alors $|f| : t \longmapsto |f(t)|$ est dérivable sur I et*
$$(|f|)' = \frac{f_1 f_1' + f_2 f_2'}{|f|}$$

Le deuxième point se retrouve en remarquant que $|f| = \sqrt{{f_1}^2 + {f_2}^2}$