Fonctions usuelles

Exponentielle, logarithme, puissance

1. On considère des fonctions f définies par leur expression analytique $f(x) = \cdots$.
   Effectuer l'étude la plus complète possible de f.
   (a) f telle que $f(x) = xe^{-x}$
   (b) f telle que $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$
   (c) f telle que $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$
   (d) f telle que $f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$
   (e) f telle que $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
   (f) f telle que $f(x) = (2x^2+1)^{\frac{3}{2}}$
   (g) f telle que $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$
   (h) f telle que $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
   (i) f telle que $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Inégalités dans $\mathbb{R}$, équations, inéquations, valeur absolue

2. Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue x réel :
   (a) $|4-x| = x$
   (b) $|x^2+x-3| = |x|$
   (c) $|x+2| + |3x-1| = 4$
   (d) $\sqrt{x+1} = x$
   (e) $\sqrt{1-2x} = |x+7|$
   (f) $x|x| = 3x+2$
   (g) $|x^2 - 6x + 4| \leqslant 1$
   (h) $x + 2 \leqslant |2x-5|$
   (i) $1 + \dfrac{1}{x} > 0$
   (j) $x + 3 \leqslant \sqrt{x+5}$
   (k) $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$
   (l) $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+2}{x+3}$
3. Résoudre les équations et inéquations, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
   (b) $e^x - e^{-x} = 2$
   (c) $2\ln(x) + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$
   (d) $2e^{2x} - e^x > 3$
   (e) $e^x - 2e^{-x} \leqslant 1$
   (f) $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$.
4. Soit $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
   (a) Montrer que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$
   (b) En déduire que si $x \geqslant y$ alors $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$
   (c) En déduire que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$
5. Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. Montrer que $x \leqslant \dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant y$

Trigonométrie, fonctions circulaires

6. (a) Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$.
   (b) Calculer $\tan(\frac{\pi}{8})$, puis $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.
7. (a) Montrer que : $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
   (b) Trouver des formules similaires pour $\sin(p) + \sin(q)$ et $\sin(p) - \sin(q)$.
8. (a) Soit x réel. On pose $t = \tan(x/2)$. Quels sont les réels x tels que t existe ?
   (b) Montrer que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
   (c) Trouver des formules similaires exprimant $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de t.
9. Résoudre graphiquement les inéquations $\cos(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(x) > -\frac{1}{2}$ et $|\tan(x)| \leqslant 1$
10. Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue x réel :
    (a) $\cos(2x) + \cos(x) = 0$
    (b) $\sin(2x) + 3\cos(x) = 0$
    (c) $\tan(2x) = 3\tan(x)$
    (d) $\cos(3x) = \sin(x)$
    (e) $\cos(x) + \sin(x) = 1 + \tan(x)$
    (f) $\sin(x) + \sin(2x) = 0$
    (g) $2\sin(x) + \sin(3x) = 0$
    (h) $3\tan(x) = 2\cos(x)$
    (i) $\cos(x) = \sqrt{3}\sin(x)$
11. (a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) > x$
    (b) Étudier la fonction $\varphi :]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$
12. Montrer que $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
13. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{\pi}$
    (b) Montrer, sans nouvelle étude de fonction, que ce résultat est également valable pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$
14. Étudier la fonction $h : x \longmapsto \cos^3(x) + \sin^3(x)$.
15. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \tan(2x) + \tan(x)$.