Calculs algébriques

Raisonnement par récurrence

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. (a) On note $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3^n - 2^n$.

   (b) On note $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 3 \times 2^n$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2\cos(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\cos(x)\, u_{n+1} - u_n$.
   Montrer par une récurrence double que $\forall \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos(nx)$

4. Enquête, conjecture, récurrence !...Déterminer une expression de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

   (a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 - u_n$

   (b) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

   (c) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = (n+4)u_n$

   (d) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (n+2)^2 u_n$

   (e) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2(n+1)u_n$

5. Soit a un réel positif. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

6. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ (séparer le cas $n = 0$)

   (b) En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est majorée par 3.

Résolutions de petits systèmes linéaires

7. Résoudre les systèmes d'inconnues x, y ou x, y, z :

   (a) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - 2y = a \\ -x + 2y = 1 + a \end{cases}$ (où a est un paramètre réel)

   (d) $\begin{cases} 3x + y + z = 7 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -2x - y + 3z = -8 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ -x + 3y - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

   (g) $\begin{cases} x + 2y + z = -3 \\ 2x - y - 3z = 4 \\ -x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x - 2y - z = 1 + a \\ -2x - 3y + z = a \\ 3x + y - 2z = 2a \end{cases}$ (où a est un paramètre réel)

Calculs de sommes

8. Écrire sous forme de « Σ » :

   (a) $T_1 = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + nq^{n-1}$

   (b) $T_2 = 1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + \cdots + (p-1) \times p^2$

   (c) $T_3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3$

9. Simplifier les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k+1)$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2^k}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{2^j}{3^{2j-1}}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{\ln(k^2+1)}{2^k}$,
   $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(3i+1)(3i+4)}$ en écrivant les termes sommés sous la forme $\dfrac{a}{3i+1} + \dfrac{b}{3i+4}$

10. Pour n un entier naturel non nul, on considère la somme suivante : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
    Grâce au changement d'indice $p = 2n - k$, montrer que $S = -S$ puis que $S = 0$.

11. En faisant apparaître un quotient dans le ln, simplifier la somme : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Sommes doubles

12. Étant donné un entier naturel n non nul, calculer les sommes doubles suivantes :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij \quad , \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij \quad , \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} \quad , \quad \sum_{(i,j)\in[[0,n]]^2} i2^j$$

13. Soit n un entier naturel non nul. On note $S = \sum_{i=1}^{n} i2^i$

    (a) Vérifier que $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i$

    (b) En intervertissant les deux symboles $\sum$, montrer que $S = (n-1)2^{n+1} + 2$.

14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme double $S = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$

Formule du binôme

15. (a) Calculer "à la main" $\binom{7}{3}$ et $\binom{8}{4}$

    (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!\,(n+1)}$

    (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+3)\,n! - (n-1)\,(n-1)! = (n-1)!\,(n+1)^2 = \frac{(n+1)!\,(n+1)}{n}$

16. (a) Développer $(1+x)^n$, et calculer : $A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; $B = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$; $C = \sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}$

    (b) En dérivant $(1+x)^n$, calculer : $T = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

17. Montrer que $\binom{2n}{n}$ est un entier pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculs de produits

18. Simplifier les produits suivants en les exprimant éventuellement à l'aide de puissances et de factorielles :
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{2+k} \quad , \quad \prod_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)} \quad , \quad \prod_{k=1}^{n}\frac{4^k}{k^2} \quad , \quad \prod_{k=1}^{n}(-5)^{k^2-k}$$

19. (a) On note $A_n = \prod_{k=1}^{n} 2k$. (A_n *est le produit de tous les entiers pairs compris entre 1 et* $2n$)
    Exprimer A_n à l'aide de puissances et de factorielles

    (b) On note $B_n = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$ (*le produit de tous les entiers impairs compris entre 1 et* $2n+1$).
    En écrivant $B_n = \frac{A_n \times B_n}{A_n}$, montrer que : $B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$