PTSI 1 — Feuille n° 3 — 2021-2022

Fonctions d'une variable réelle

Parité, monotonie, dérivation, étude de fonctions

1. (a) Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut n'être ni croissante ni décroissante.
   (b) Montrer que la somme de deux fonctions majorées (resp. bornées) est majorée (resp. bornée).
   (c) Le produit de deux fonctions majorées (resp. bornées) est-il majoré (resp. borné) ?
   (d) Que dire de la composée de deux fonctions croissantes ? d'une fonction croissante avec une fonction décroissante ? de deux fonctions décroissantes ?
2. Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?
3. On pose $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Montrer que $A(1,0)$ est l'unique point de $\mathcal{C}$ dont la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
4. Déterminer le domaine de définition, de dérivabilité, et calculer la dérivée des fonctions définies par :

   (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
   (b) $f(x) = \ln(3x)$
   (c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+1}$
   (d) $f(x) = e^{-x}\cos(3x)$
   (e) $f(x) = \sin^4(x)$
   (f) $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$
   (g) $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^3}$
   (h) $f(x) = x^n \ln(x)$
   (i) $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}$
   (j) $f(x) = x^{1-x^2}$
   (k) $f(x) = 2x^2\sqrt{1-x^2}$
   (l) $f(x) = \sin(x)\tan(x) + 2\cos(x) - 2$
5. Étudier et représenter graphiquement les fonctions définies par les expressions suivantes :

   (a) $f(x) = (1+x)^{x-1}$
   (b) $f(x) = \ln(1+e^x)$
   (c) $f(x) = x^x$
   (d) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
6. Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leqslant b$
   (a) Déterminer les variations puis le signe (sur $\mathbb{R}_+$) de $g : x \longmapsto a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$
   (b) Étudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$
   (c) Démontrer que $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leqslant (\ln(2))^2$
7. Étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$. En déduire la résolution dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de l'équation $a^b = b^a$

Bijection

8. (a) Montrer, grâce au théorème de bijection, que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^3+1}$ est bijective de $[-1,+\infty[$ sur son image (à préciser).
   (b) Retrouver le résultat de la question 1) et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation : $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [-1,+\infty[$.
9. Pour tout $x > 0$ on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$
   (a) Montrer que f est une bijection de $]0,+\infty[$ dans un intervalle à préciser.
   (b) Expliciter l'application réciproque.
10. On pose $f(x) = x^2 + \ln(x)$
    (a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à préciser. *on note g son application réciproque*
    (b) Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer g' en fonction de g.

Fonctions ch, sh , Arccos , Arcsin et Arctan

11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations :

    (a) $\mathrm{sh}(x) = -2$
    (b) $\mathrm{ch}(x) > 3$
    (c) $\sin(3x) = -\frac{1}{2}$
    (d) $\cos(2x) \leqslant -\frac{1}{3}$
    (e) $\sin(x) + \cos(x) \geqslant 1$
    (f) $3\cos(x) - 4\sin(x) = 1$
    (g) $\sin^2(x) + \sin(x) - 1 \leqslant 0$
    (h) $=$
    (i) $\tan^2(x) + \tan(x) - 2 = 0$
    (j) $7\,\mathrm{ch}(x) + 2\,\mathrm{sh}(x) = 9$
    (k) $3\,\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) = 1.$
    (l) $2\,\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{ch}(x) - 3 = 0$

12. Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\operatorname{ch} x - 2}{\operatorname{ch} x + 4} < \dfrac{\operatorname{ch} x - 3}{\operatorname{ch} x + 2}$

13. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, calculer la dérivée des fonctions définies par :

(a) $f(x) = \operatorname{sh}^3(x)$
(b) $f(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x)}{2\operatorname{ch}(x)+1}$
(c) $f(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{Arccos}(x))$
(d) $f(x) = \operatorname{Arccos}(\frac{x^2}{4})$
(e) $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)})$
(f) $f(x) = \operatorname{Arccos}(x^2 - 1)$
(g) $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x^2 - x)$
(h) $f(x) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{\frac{1+x}{x-1}})$
(i) $f(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))$

14. Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\operatorname{Arccos}(x) = 2\operatorname{Arccos}(\frac{3}{4})$
(b) $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arccos}(\frac{1}{4}) + \operatorname{Arcsin}(\frac{1}{3})$
(c) $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x)$

15. (a) Simplifier, pour tout réel x de l'intervalle $[-1, 1]$, les expressions suivantes :
$A = \sin(\arcsin(x))$; $B = \sin(\arccos(x))$; $C = \cos(\arcsin(x))$; $D = \cos(\arccos(x))$

(b) Simplifier, pour tout réel x de l'intervalle $[-\pi; \pi]$, les expressions suivantes (quand elles existent)
$A = \arcsin(\sin(x))$; $B = \arccos(\cos(x))$; $C = \arctan(\tan(x))$

16. Démontrer que :

(a) $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall x < 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-\pi}{2}$

(b) $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(d) Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\arctan(x)$. Que dire si $|x| > 1$?

17. (a) Justifier les égalités suivantes :
$\dfrac{\pi}{4} = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right)$

(b) Prouver la formule de *Machin (anglais , 1680-1751)* :
$\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$