Nombres complexes

Écriture algébrique, conjugué, module d'un nombre complexe

1. Calculer les nombres complexes suivants et les mettre sous forme algébrique :
$$a=(2+3i)(1-i)-(2+i)^2\ ,\quad b=(2-i)(3+i)+4i\ ,\quad c=\frac{9-4i}{2+i}\ ,\quad d=\frac{4+i}{1-i}+\frac{2-i}{3-i}$$
2. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$: $z+|z|=8+4i$
3. A quelles conditions sur a et b réels le nombre complexe $(2a-b-i(a+b))(-a-i(a+b))$ est-il un nombre réel ?
4. Montrer que pour tous nombres complexes z et z' on a :
$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|^2+|z'|^2) \qquad \textit{(appelée "identité du parallélogramme")}$$
Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|$.

Nombres complexes de module 1, forme trigonométrique

6. On considère le nombre complexe $z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.
   (a) Écrire z^2 sous forme algébrique.
   (b) Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.
7. Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes suivants dont on donne le module et un argument :
$$a=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]\ ,\quad b=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]\ ,\quad c=\left[4,\frac{5\pi}{6}\right]$$
8. Déterminer le module, l'argument et écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
$z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=1+i$, $z_3=\dfrac{-1}{1-i}$, $z_4=\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$, $a_n=(\sqrt{3}+i)^n$ (en fonction de $n\in\mathbb{N}$)
$z_5=1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ en fonction de $\theta\in]-\pi,\pi[$
9. Linéariser $\sin^3(x)$, $\cos^5(x)$, $\sin^2(x)\cos^3(x)$ et $\sin^5(x)$.
Exprimer $\cos(5x)\sin^2(3x)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$. Exprimer $\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)+\sin(8x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
10. Si on note C_2 la fonction $x\longmapsto 2x^2-1$ et S_2 la fonction $x\longmapsto 2x$, alors pour tout $\theta\in\mathbb{R}$: $\cos(2\theta)=C_2(\cos(\theta))$ et $\sin(2\theta)=S_2(\cos(\theta))\sin(\theta)$.
Montrer plus généralement que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe deux fonctions polynomiales C_n et S_n pour lesquelles : $\cos(n\theta)=C_n(\cos(\theta))$ et $\sin(n\theta)=S_n(\cos(\theta))\sin(\theta)$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.
11. On désigne par α et β deux réels quelconques. Simplifier les sommes :
$$S_n(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{n}\cos(k\alpha+\beta)\ ,\quad T_n(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{n}\sin(k\alpha+\beta)\ ,\quad R_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\cos^2(k\alpha)\quad\text{et}\quad Q_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\sin^2(k\alpha)$$

Équations algébriques, racines n-èmes

12. Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de $A=i$, de $B=7+24i$ et de $C=3-2i$.
13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   (a) $z^2-4z+5=0$
   (b) $z^2+(5-2i)z+5-5i=0$
   (c) $z^2+(3+i)z+4+3i=0$
   (d) $z^2-2^{\theta+1}\cos(\theta)z+2^{2\theta}=0$
   (e) $(1+i)z^2+3(1-i)z-2(2+i)=0$
   (f) $iz^2+(i+3)z+2-2i=0$
   (g) $z^3=i$
   (h) $z^3+2-2i=0$
   (i) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^4=1$
   (j) $z^4=24i-7$
   (k) $z^4-8(1+i)z^2+63+16i=0$
   (l) $4iz^3+2(1+3i)z^2-(5+4i)z+3(1-7i)=0$ sachant qu'il y a une racine réelle

14. (a) Rappeler le développement de $(a+b)^5$, pour a et b complexes.
    (b) Résoudre de deux façons l'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$, d'inconnue complexe z.
    (c) En comparant ces deux méthodes, calculer les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
    (on mettra ces nombres sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$, avec p , q et n entiers)
    (d) Déterminer la valeur exacte, sous la forme la plus simple possible, de $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$
15. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ les racines n^{iemes} de 1.
    - Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$
    - Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
    - Calculer $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$ en fonction de n.

Exponentielle complexe

16. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
    (a) $e^z = 1+i$ (b) $e^z = -5-12i$ (c) $e^z + e^{-z} = 1$ (d) $e^z + e^{-z} = 2i$

Nombres complexes et géométrie plane

17. Soit les points A d'affixe 8, B d'affixe $-4+4i$ et C d'affixe $-4i$. Étudier les particularités géométriques du triangle ABC.
18. Soit $ABCD$ un quadrilatère plan. On construit 4 triangles isocèles directs : $A'BA$ rectangle en A',$B'CB$ rectangle en B',$C'DC$ rectangle en C', et $D'AD$ rectangle en D'.
    Montrer que les segments $[A'C']$ et $[B'D']$ sont orthogonaux et de même longueur.
19. (a) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixes respectives z, i et iz forment un triangle équilatéral.
    (b) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixes respectives z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle.
20. A tout complexe z on associe $f(z) = (1+i)z - 2i$, et on note F la transformation géométrique associée.
    (a) Déterminer le(s) point(s) invariant(s) par F.
    (b) Déterminer la nature géométrique de l'application F.
21. A tout complexe $z \neq 2i$ on associe $Z = \dfrac{z-1}{z-2i}$. Déterminer de deux façons différentes les ensembles :
    $A = \{M$ d'affixe z tel que $Z \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{M$ d'affixe z tel que $Z \in i.\mathbb{R}\}$
22. Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations géométriques suivantes.
    - translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $3-2i$
    - rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$
    - rotation de centre $A(1-2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
    - symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$
    - symétrie par rapport au point B d'affixe $3i$
    - homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre $C(-2+i)$
    - composée de ces deux dernières transformations

    Inversement, caractériser géométriquement chacune des applications complexes suivantes.
    - $f(z) = \overline{z} - 3$
    - $f(z) = (1-i)z + 2i - 1$
    - $f(z) = 2\overline{z}$
    - $f(z) = 3z - 4i + 2$
    - $f(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$