Chapitre 4 : Nombres complexes

4.1 Nombres complexes

4.1.1. Écriture algébrique d'un nombre complexe

Définition 1 :

Soit i, un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. On appelle nombre complexe, tout nombre $z = a + ib$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$).

Cette écriture s'appelle la forme algébrique de z et $\begin{cases} a = Re(z) \text{ s'appelle la partie réelle de } z \\ b = Im(z) \text{ s'appelle la partie imaginaire de } z \end{cases}$

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

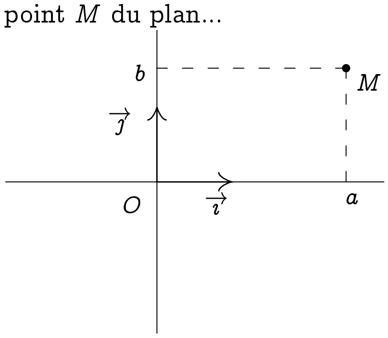
Remarques :

— si $b = 0$, alors $z = a \in \mathbb{R}$. On identifie cette partie de $\mathbb{C}$ à l'ensemble des réels.
— si $a = 0$, alors $z = ib$. On dit que z est un imaginaire pur.

Identification de $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormal direct ("plan complexe")

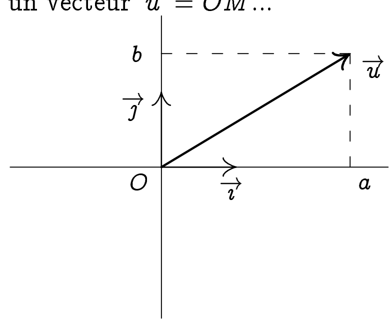
Un nombre complexe $z = a + ib$ est donc caractérisé par un couple de réels (a, b). On le représente dans le plan, soit par le point M de coordonnées (a, b), soit par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b).

La donnée d'un point M du plan...



M est de coordonnées (a, b) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
M est appelé l'image de z

...équivaut à la donnée d'un vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$...



$\overrightarrow{u}$ est de coordonnées (a, b) dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

...équivaut à la donnée d'un nombre complexe

$z = a + ib$

z est appelé l'affixe du point M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Égalité de deux complexes :

$$a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \quad \text{et} \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Opérations sur les nombres complexes

Définition 2 :

On définit sur $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication par :

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

On admet que les formules vues dans le chapitre 2 se généralisent :

Propriété 1 :

Pour tout entier naturel n non nul et pour tous complexes x, a et b :

$$\boxed{\forall x \neq 1\,,\ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{et si } \ x=1 \ \text{ alors } \ \sum_{k=0}^{n} x^k = n+1}$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\times\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)}$$

4. 1. 2. Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition 1 :

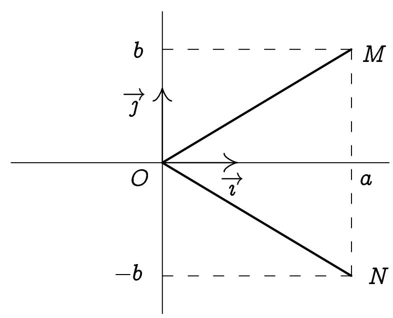
Pour tout nombre complexe $z = a+ib$, on appelle conjugué de z le nombre :

$$\overline{z} = a - ib$$

géométriquement :

Soient M et N les points

d'affixes respectives z et $\overline{z}$



M et N sont symétriques

par rapport á l'axe des abscisses

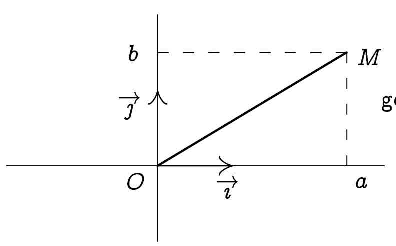
Propriété 1 :

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $\overline{\overline{z}} = z$ *(le conjugué du conjugué de z est z)*
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ • $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ • *si $z' \neq 0$, alors* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- *z est réel* $\Longleftrightarrow Im(z) = 0 \Longleftrightarrow \overline{z} = z$ • *z est imaginaire pur* $\Longleftrightarrow Re(z) = 0 \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$
- $Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Définition 2 :

On appelle module du nombre complexe z, le réel : $\boxed{|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}}$



géométriquement $d(O,M) = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

remarques :

— la notion de module coïncide avec celle de valeur absolue lorsque z est réel.
— on a : $z.\overline{z} = (a+ib).(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$.
— Si M et M' sont d'affixes respectives z et z', alors $|z'-z| = MM'$, la distance de M à M'.
— Le cercle de centre $A(a)$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z-a| = R$.
— Le disque (fermé) de centre $A(a)$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z-a| \leqslant R$.

Propriété 2 :

Soient z et z', deux nombres complexes. alors :

- $|z| \geqslant 0$ *et* $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$.
- $|z.z'| = |z|.|z'|$ • *si* $z' \neq 0$ *alors* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- *si* $z = a + ib$ *est t.q.* $z \neq 0$ *alors* $\boxed{z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}}$

Remarques : Un nombre complexe z est de module 1 si et seulement si $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$

Si z est un complexe alors $|Re(z)| \leqslant |z|$ et $|Im(z)| \leqslant |z|$

Inégalité triangulaire :

Propriété 3 :

Soient z et z' deux nombres complexes. alors $\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$

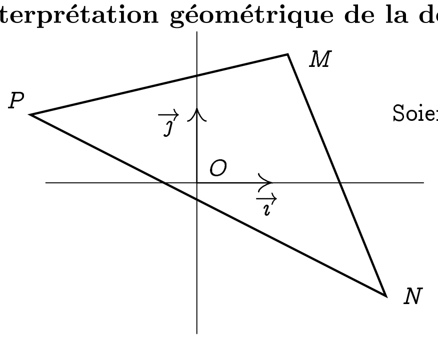
Cas d'égalité :

$|z + z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow z.\overline{z'} \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow M(z)$ *et* $M'(z')$ *sont sur une même demi-droite d'origine* O.

Conséquences : Soient z, z' et z'', trois nombres complexes. alors :

- $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'|$ et $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$
- $|z - z''| \leqslant |z - z'| + |z' - z''|$

Interprétation géométrique de la dernière inégalité :



Soient M, N et P d'affixes z, z' zt z''

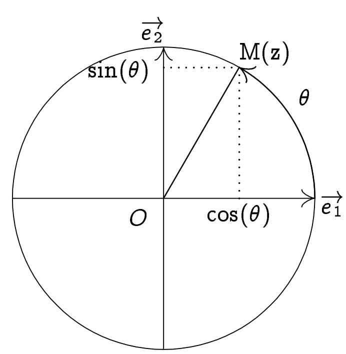
$d(M, N) = |z' - z|$, $d(N, P) = |z'' - z'|$ et $d(M, P) = |z'' - z|$

"la plus courte distance d'un point à un autre (dans le plan) est la ligne droite"

4. 2 Nombres complexes de module 1, forme trigonométrique

4. 2. 1. Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

On s'intéresse à l'ensemble des nombres complexes de module 1. Il se note : $\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}.}$



$\mathbb{U}$ est représenté dans le plan par le cercle trigonométrique.
Si $z \in \mathbb{U}$, et si M est l'image de z alors
en posant $\theta = \ ((Ox), \overrightarrow{OM})$
on a $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
θ n'est pas unique, il est défini modulo 2π
On adopte la notation suivante :

Définition 1 :

$\boxed{\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}}$

On vérifie alors que

Propriété 1 :

- $\boxed{|e^{i\theta}| = 1}$
- *Pour tous réels θ et θ' on a :* $\boxed{e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]}$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2$*, on a* $z.z' \in \mathbb{U}$*. Plus précisément,* $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ *on a :* $\boxed{e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}$
- *Pour tout* $z \in \mathbb{U}$*, on a* $z^{-1} \in \mathbb{U}$*. Plus précisément,* $\forall \theta \in \mathbb{R}$ *, on a :* $\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}}$
- *Pour tous réels θ et θ' on a :* $\boxed{\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}}$

La notation à l'aide d'une exponentielle se trouve justifiée a posteriori par la similarité des règles de calculs avec l'exponentielle réelle.

Valeurs particulières : on a $\boxed{e^{i\pi} = -1 \text{ et } e^{i\pi/2} = i}$

Relations d'Euler

Pour tout θ appartenant à $\mathbb{R}$, $\cos(\theta)$ est la partie réelle de $e^{i\theta}$ et $\sin(\theta)$ est la partie imaginaire de $e^{i\theta}$. On en déduit les relations :

Propriété 2 :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Technique de l'angle moitié, deux factorisations

Propriété 3 :

Pour tout réel t :

$$1 + e^{it} = 2\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad 1 - e^{it} = -2i\sin\left(\tfrac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}$$

Propriété 4 :

Pour tous réels a et b :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}} \ \text{ et } e^{ip} - e^{iq} = 2i\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$$

Formule de Moivre

Par récurrence, on peut établir :

Propriété 5 :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n}$$

Formule qui n'a de sens que si n est un entier relatif

4.2.2. Applications à la trigonométrie

Formules $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$

$\cos(p) + \cos(q) = Re\left(e^{ip} + e^{iq}\right) = Re\left(2\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}\right) = 2\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)$

Faire les autres cas

Linéarisation :

On transforme une expression de la forme $\cos^n(x)\sin^m(x)$ en combinaison linéaire de $\cos(px)$ et $\sin(qx)$.

méthode : On utilise les formules d'Euler, puis on développe à l'aide du binôme, et on regroupe enfin les termes conjugués en utilisant à nouveau Euler.

↱ exemple : linéariser $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$

Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ **et** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$

On pose $u = e^{it}$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$ et $Z_n = C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} u^k$.

1. Si $u = 1$, soit $t = 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$), trouver les valeurs de C_n et S_n.
2. Si $t \neq 2k\pi$, simplifier Z_n et en déduire des expressions de C_n et S_n.

Expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$

On applique la formule de Moivre : $\cos(nt) + i\sin(nt) = (\cos(t) + i\sin(t))^n$.
On développe le membre de droite et on sépare partie réelle et partie imaginaire.
↱ exemple : calculer $\cos(3t)$

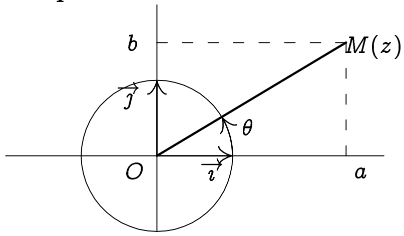
4. 2. 3. Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 1 :

> *Soit z un nombre complexe non nul. Le nombre complexe $u = \dfrac{z}{|z|}$ est de module 1. Tout réel θ tel que $e^{i\theta} = u$ est appelé argument de z et noté $\theta = \arg(z)$.*

L'ensemble des arguments de z est $\{\theta + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

géométriquement



$\theta = arg(z)$ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

Propriété 1 :

> *Pour trouver un argument d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$, on utilise les relations :*
>
> - $\boxed{\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$
> - *si* $a \neq 0$ *alors* $\boxed{\tan(\theta) = \dfrac{b}{a}}$

Propriété 2 :

> *Pour tous nombres complexes non nuls z et z' et tout entier relatif n :*
>
> - $\boxed{\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \ \ [2\pi]}$
> - $\boxed{\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \ \ [2\pi]}$
> - $\boxed{\arg(z^n) = n\arg(z) \ \ [2\pi]}$

↱ quelle angle mesure $\arg(z/z')$?

Soit z un nombre complexe non nul, de module $\rho = |z|$ et d'argument θ. De la relation $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|} = \dfrac{z}{\rho}$, on en déduit l'égalité :

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta} = |z|(\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z)))}$$

Cette écriture de z s'appelle forme trigonométrique de z. Attention, il n'y a une petite évolution sur ce point par rapport au vocabulaire du programme officiel de terminale.

Propriété 3 :

> *Pour tous nombres complexes non nul $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho e^{i\theta'}$:*
>
> - *le conjugué de z est* $\boxed{\overline{z} = \rho e^{-i\theta}}$ • *l'inverse de z est* $\boxed{z^{-1} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}}$ • *le produit* $\boxed{zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}}$

4. 3 Équations

4. 3. 1. Racine d'un polynôme, factorisation

On considère un polynôme P de degré n à coefficients complexes : $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ (où les a_k sont complexes).

Définition 1 :
On dit que $a \in \mathbb{C}$ est racine de P si $P(a) = 0$.

Propriété 1 :
Soit P un polynôme à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$. Alors
a est racine de $P \Longleftrightarrow P$ est factorisable par $z - a$.

Exemple $P : z \longmapsto z^3 + 3z^2 - 2z - 2$ admet une racine évidente. laquelle ? Factoriser P.

4. 3. 2. Racine carrée d'un nombre complexe, équation du second degré

Méthode de recherche d'une racine carrée

Avec $X = \alpha + i\beta$ on pose $\delta = r + is$ et l'équation $\delta^2 = X$ équivaut au système : $\begin{cases} r^2 + s^2 = |X| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ r^2 - s^2 = Re(X) = \alpha \\ 2rs = Im(X) = \beta \end{cases}$

Les deux premières équations donnent r^2 et s^2, et la troisième permet de déterminer le signe de r par rapport au signe de s. On obtient deux solutions opposées quel que soit le complexe $X \neq 0$.
On évite d'écrire $\delta = \sqrt{X}$, car aucune des deux ne peut être choisie supérieure à l'autre.

Résolution des équations du second degré

On considère l'équation d'inconnue z, (les coefficients a, b et c sont des complexes, $a \neq 0$) :

$$(E) \quad : \qquad az^2 + bz + c = 0$$

1. Mettre l'expression $az^2 + bz + c$ sous forme canonique.
2. On pose le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ un complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.
   Exprimer la ou les solution(s) de (E) en fonction de a, b et δ et encadrer la formule obtenue.

↱ exemple : Résoudre $z^2 + (1+i)z + \dfrac{1}{2} = 0$.

relations entre coefficients et racines

Propriété 1 :
Si z_1 et z_2 sont les solutions éventuellement confondues de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a \neq 0$) alors :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad et \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

4. 3. 3. Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité et d'un nombre complexe a

Introduction :

1. Résoudre l'équation $z^8 = i$ en exprimant z sous la forme trigonométrique. Placer les solutions sur une figure.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'équation $\boxed{(E) \qquad z^n = 1}$.

   En écrivant z sous forme trigonométrique, montrer que l'équation (E) admet n racines distintes qu'on appelle racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

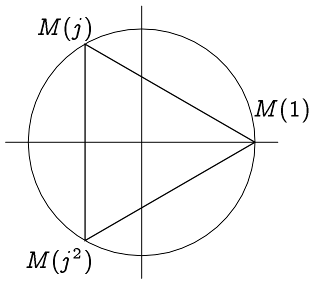
Définition 1 :

- *On appelle racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité les complexes $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k = 0 \dots n-1$. Ce sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.*
- *On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité :*

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \ / \ k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

On constate que : • $1 \in \mathbb{U}_n$. • si $(z, z') \in {\mathbb{U}_n}^2$ alors $zz' \in \mathbb{U}_n$. • si $z \in \mathbb{U}_n$ alors $z^{-1} \in \mathbb{U}_n$.

Cas particulier $n = 3$:



Dans le cas $n = 3$, l'équation $z^3 = 1$ admet trois solutions qu'on appelle racines cubiques de l'unité et que l'on note $\omega_0 = e^0 = 1$, $w_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}} = j$ et $w_2 = e^{\frac{i4\pi}{3}} = j^2 = \overline{j}$
Attention, la lettre j a une autre signification en physique : elle remplace dans ce cas le i de $i^2 = -1$ car on réserve la lettre i pour l'intensité d'un courant.

Résolution de $z^n = a$

Deux cas sont possibles :

1. Soit $a = 0$ et alors $z^n = 0 \iff z = 0$
2. Soit $a \neq 0$ et on écrit a sous la forme trigonométrique : $a = \beta e^{i\alpha}$.

Propriété 1 :

Pour tous $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = a = \beta e^{i\alpha}$ admet n solutions :

$$z_k = \sqrt[n]{\beta}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{\beta}\, e^{i\frac{\alpha}{n}}\, w_k$$

où $k = 0, 1, \dots, n-1$

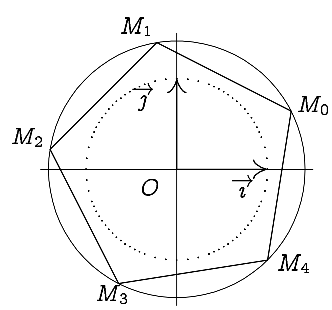
↱ Démonstration à faire et à retenir plus que la formule elle-même : il suffit d'écrire l'égalité des modules et des arguments.

↱ exemple : résoudre (E) $\qquad z^5 = -32 + 32i$

Remarque :

Les points M_k d'affixe $z_k = \sqrt[n]{\beta}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ forment un polygone régulier de centre O dans le sens suivant :

- Ils sont situés sur un même cercle de centre O.
- $M_0M_1 = M_1M_2 = \cdots = M_{n-2}M_{n-1} = M_{n-1}M_0$



Propriété 2 :

Soit $n \geqslant 2$. La somme des n solutions de l'équation $z^n = a$ est nulle.
La somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est nulle.
En particulier : $1 + j + j^2 = 0$

4.4 Exponentielle complexe

Définition 1 :

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ on pose :

$$\boxed{\exp(z) = e^z = e^{a+ib} = e^a.e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))}$$

Propriété 1 :

- *Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ on a* $\boxed{|e^z| = e^a \text{ et } arg(e^z) = b}$.
- *Pour tous complexes z et z' on a :* $\boxed{e^z e^{z'} = e^{z+z'}}$ *et* $\boxed{e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}}$
- *Pour tous complexes z et z' on a* $\boxed{\exp(z) = \exp(z') \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}.}$

4. 5 Nombres complexes et géométrie plane

On peut caractériser certaines notions géométriques du plan, par des conditions sur les affixes associées aux points qui interviennent :

a. distance entre deux points

Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' alors $\boxed{d(M, M') = |z' - z|}$

Le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - \omega| = R$

b. mesure d'un angle

Soient M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2. On a $\boxed{(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = arg(z_2/z_1)}$

D'une manière plus générale :

Pour trois points distincts A, B, C d'affixes a, b et c , $\boxed{\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \text{ est une mesure de l'angle orienté } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).}$

c. alignement

Soient M et M' deux points d'affixes respectives $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ alors :

$$\boxed{M \text{ , } M' \text{ et } O \text{ sont alignés} \iff \arg(z) = \arg(z') \ \ [\pi] \iff \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}}$$

Soient trois points distincts A, B, C d'affixes a, b et c, alors :

$$\boxed{A \text{ , } B \text{ et } C \text{ sont alignés} \iff Z = \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \iff Z = \overline{Z}}$$

d. orthogonalité

Soient M et M' deux points d'affixes respectives $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ alors :

$$\boxed{\text{les droites } (OM) \text{ et } (OM') \text{ sont orthogonales} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \arg(z') \ \ [\pi] \iff \frac{z'}{z} \in i.\mathbb{R}}$$

Soient quatre points distincts A, B, C , D d'affixes a, b, c et d, alors :

$$\boxed{\text{les droites } (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont orthogonales} \iff Z = \frac{d-c}{b-a} \in i.\mathbb{R} \iff Z = -\overline{Z}}$$

Transformations du plan complexe

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est associé canoniquement au plan géométrique $\mathcal{P}$. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto z'$.
Si on appelle M et M' les points d'affixes respectives z et z', on peut définir l'application $F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}; M \longmapsto M'$.

On appelle transformation du plan toute une bijection du plan dans lui-même.

↱ Déterminer la nature géométrique de F pour chacune des applications f ci-dessous :

- $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto z + b$ où $b \in \mathbb{C}$
- $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto az$ où $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$
- $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto kz$ où $k \in \mathbb{R}_+^*$
- $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto -z$
- $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; z \longmapsto \overline{z}$