

Devoir maison n° 4

A rendre le 12 octobre 2023

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

- On considère la fonction d définie sur $]0, +\infty[$ par $d(x) = x^2 \ln x - x + 1$.
 - Déterminer les fonctions d' et d'' .
 - En déduire les variations de d' .
 - Montrer que $d'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0, 1]$.
 - Établir les variations puis le signe de d .
- Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
- Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à cette tangente.
- Tracer la tangente T et l'allure de la courbe représentative de f .

Exercice 2 Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $(E) : x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

On pose $f(x) = \sqrt{x} \ln(x) + \ln(2)$.

- Donner le domaine de définition de f , et préciser ses limites aux bornes de ce domaine.
- Étudier les variations de la fonction f , et en dresser un tableau de variations complet.
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0.69$, et $\frac{1}{e} \simeq 0.36$).
- Calculer $f\left(\frac{1}{4}\right)$ et $f\left(\frac{1}{16}\right)$.
- Conclure en donnant les solutions de l'équation (E) .